

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Інститут прикладного системного аналізу  
Кафедра математичних методів системного аналізу**

До захисту допущено

В. о. завідувача кафедри

\_\_\_\_\_ О.Л. Тимошук

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2020 р

**Дипломна робота  
на здобуття ступеня бакалавра  
за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз і управління»  
спеціальності 124 «Системний аналіз»**

**на тему: «Сценарно-імітаційні математичні моделі інвестиційних процесів  
в економіці»**

Виконав:

студент IV курсу, групи КА-64

Байбара Ірина Григорівна

Керівник:

професор кафедри ММСА,

д.ф.м.н. Лопатін О.К

Консультант з економічного розділу:

к.е.н., доцент кафедри ТТІЕ

Шевчук Олена Анатоліївна

Консультант з нормоконтролю:

к.т.н., доцент кафедри ММСА

Коваленко Анатолій Єпіфанович

Рецензент:

к.т.н., доцент кафедри ІТ

ФІТ КНУ ім. Т. Шевченка

Красовська Ганна Валеріївна

Засвідчую, що у цій дипломній  
роботі немає запозичень з праць  
інших авторів без відповідних  
посилань.

Студент \_\_\_\_\_

Київ – 2020 року

**Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

**Інститут прикладного системного аналізу**

**Кафедра математичних методів системного аналізу**

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Спеціальність – 124 "Системний аналіз"

Освітньо-професійна програма «Системний аналіз і управління»

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

В. о. завідувача кафедри

\_\_\_\_\_ О.Л. Тимощук

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

**ЗАВДАННЯ**

**на дипломну роботу студенту**

**Байбара Ірина Григорівна**

1. Тема роботи «Сценарно-імітаційні математичні моделі інвестиційних процесів в економіці», керівник роботи Лопатін Олексій Костянтинівич, д.ф.м.н., професор, затверджені наказом по університету від

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ р. № \_\_\_\_\_

2. Термін подання студентом роботи

3. Вихідні дані до роботи

4. Зміст роботи

5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо)

6. Дата видачі завдання \_\_\_\_\_

## Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Формулювання тематики (напрямку) дослідження	03.09.2019 – 30.09.2019	
2	Затвердження теми дипломної роботи	01.10.2019 – 30.10.2019	
3	Розроблення плану написання дипломної роботи та формулювання задач дослідження	01.11.2019 – 30.11.2019	
4	Освоєння програмного пакету E&F Chaos	01.12.2019 – 30.12.2019	
5	Дослідження та аналіз s-функції Вейбула	25.01.2020 – 25.02.2020	
6	Освоєння програмного пакету Ithink	01.03.2020 – 30.03.2020	
7	Розробка та аналіз моделі Солоу за допомогою пакету Ithink	01.03.2020 – 30.04.2020	
8	Виконання обчислювальних експериментів, аналіз та оформлення результатів	01.05.2020 – 17.05.2020	
9	Оформлення пояснювальної записки у цілому	18.05.2020 – 25.05.2020	
10	Підготовка презентації для захисту	25.05.2020 – 28.05.2020	
11	Попередній захист дипломної роботи	29.05.2020 – 02.06.2020	
12	Захист дипломної роботи	15.06.2020 – 19.06.2020	

Студент

Байбара Ірина Григорівна

Науковий керівник

Лопатін Олексій Костянтинович

## РЕФЕРАТ

Дипломна робота: 111 ст., 90 рис., 8 табл., 1 дод., 17 джерел.

ІНВЕСТИЦІЙНІ ПРОЦЕСИ, СТІЙКА ТОЧКА, S-КРИВА, МОДЕЛЬ СОЛОУ, ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, ФАЗОВА ДІАГРАМА, АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ.

Мета роботи: Моделювання та дослідження математичних моделей інвестиційних процесів в економіці.

Об'єкт дослідження: Закон еволюційного розвитку технологій та інноваційних процесів.

Предмет дослідження: Моделювання та прогнозування росту економіки та зміни технологій на прикладі s-функції Вейбула.

Робота присвячена ключовим системним принципам адекватних математичних моделей і програмного забезпечення, які часто використовуються в інвестиційних процесах. В роботі було побудовано узагальнену модель Солоу на основі s-функції Вейбула для аналізу росту економіки держави, з використанням програмних засобів, що найбільше підходять для чисельно-аналітичного дослідження математичних моделей теорії економічного зростання, таких як Ithink, E&F Chaos, Desmos.



## ABSTRACT

Bachelor thesis: 111 pages., 90 pics., 8 tables., 1 append., 17 sources.

INVESTMENT PROCESSES, STABILITY POINT, S-CURVE, SOLOW MODEL, SCENARIO-SIMULATION MATHEMATICAL MODELING, PHASE DIAGRAM, SENSITIVITY ANALYSIS.

The aim of the work: Modeling and research of mathematical models of investment processes in economics.

Object of a research: The law of evolutionary technological development and innovation processes.

Topic of a research: modelling and forecasting the growth of economy and changes in technology on the example of Weibull s-function.

The paper is devoted to the key system principles of adequate mathematical models and software, which are often used in investment processes. The paper constructs a generalized Solow model based on Weibull's s-function for the analysis of state economic growth, using software that is most suitable for numerical-analytical study of mathematical models of economic growth theory, such as Ithink, E&F Chaos, Desmos.

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП.....</b>	<b>8</b>
<b>РОЗДІЛ 1. ВВЕДЕННЯ В ТЕОРІЮ НЕЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.....</b>	<b>10</b>
1.1 Передісторія.....	10
1.2 Лінійні скінчено-різницеві рівняння.....	11
1.3 Ітераційні методи .....	15
1.4 Нелінійні скінченно-різницеві рівняння .....	17
1.5 Стаціонарні стани та їх стабільність.....	22
1.6 Цикли та їх стабільність .....	27
1.7 Хаос .....	34
1.8 Квazіперіодичність.....	38
1.9 Висновки до розділу.....	40
<b>РОЗДІЛ 2. СТІЙКИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ РІСТ ЕКОНОМІКИ. МОДЕЛЬ РОСТУ СОЛОУ ТА ЇЇ УЗАГАЛЬНЕННЯ НА ПРИКЛАДІ S-ФУНКЦІЇ ВЕЙБУЛА .....</b>	<b>42</b>
2.1 Модель росту Солоу [17].....	42
2.2 Механіка моделі .....	43
2.3 Стаціонарний стан в функції Кобба-Дугласа .....	44
2.4 Узагальнення моделі Солоу зростання економіки на основі s-функції Вейбула .....	45
2.5 Висновки до розділу.....	57
<b>РОЗДІЛ 3. ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МОДЕЛІ СОЛОУ МЕТОДАМИ СИСТЕМНОЇ ДИНАМІКИ.....</b>	<b>58</b>
3.1 Імітаційне моделювання .....	58
3.2 Дослідження моделі Солоу за допомогою пакета Ithink.....	60

3.3 Імітаційне моделювання узагальненої моделі Солоу росту економіки на основі s-функції Вейбула .....	65
3.4 Висновки до розділу .....	81
<b>РОЗДІЛ 4. ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ</b>	
<b>ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ .....</b>	<b>83</b>
4.1 Постановка завдання проектування .....	83
4.2 Обґрунтування функцій програмного продукту .....	83
4.3 Обґрунтування системи параметрів ПП .....	85
4.4 Економічний аналіз варіантів розробки ПП .....	91
4.5 Вибір кращого варіанта ПП техніко-економічного рівня .....	96
4.6 Висновки до розділу .....	96
<b>ВИСНОВКИ .....</b>	<b>98</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .....</b>	<b>100</b>
<b>ДОДАТКИ .....</b>	<b>102</b>

## ВСТУП

Економічний розвиток суспільства в цілому і благополуччя кожної людини визначаються зрештою успіхами в здійсненні інвестиційних проектів. Інвестиційний процес – це складний комплекс робіт, який включає три основні фази: визначення об’єкта інвестування, залучення фінансових коштів, здійснення контролю за їх використанням. Інвестиції сьогодні є важливим елементом економіки, вельми істотною пірамідальною основою господарського розвитку країни, стратегічним вістрям, направленим на істотне поліпшенні прибутковості країни і її народу, на примноження ВВП і подвоєння його в найближчій перспективі. Без прогресивного розвитку інвестицій в основний капітал, без примноження темпів зростання і розвитку навряд чи варто чекати яких-небудь кардинальних покращень у механізмах взаємодії економіки і її інвестиційних складових. Все це пояснює необхідність дослідження суті і економічної природи таких категорій, як інвестиції та інвестиційний процес.

В даний час переважаючою точкою зору на інвестиційний процес є його уявлення як складної цілеспрямованої мультиразумної динамічної системи, управління поведінкою, якої можливо лише через призму системних властивостей і закономірностей. Тому для розв’язання усіх перерахованих задач вище необхідно використання економіко-математичних моделей, що можливо лише за використанням спеціалізованих програмних засобів. Очевидно, що вибір програмного забезпечення дуже широкий і перед користувачем виникає проблема вибору того засобу, який дозволить найкращим чином побудувати модель не тільки зручну для користувача, але і адекватно відображає реальну ситуацію.

Перший розділ націлений на введення в теорію нелінійний дискретних динамічних систем, на прикладах розглядаються різні типи

рівнянь для кращого розуміння подальшої інформації, яка буде розглядатися в наступних розділах.

Другий розділ присвячених вивченню моделі Солоу. Після ознайомлення з теоретичними відомостями представлений приклад узагальнення моделі Солоу зростання економіки на основі  $s$ -функції Вейбула. Аналіз моделі був проведений за допомогою програми E&F Chaos і Desmos.

У третьому розділі проведене імітаційне моделювання за допомогою пакету Ithink моделі Солоу та узагальненої моделі Солоу на прикладі  $s$ -функції Вейбула. Також був проведений аналіз по впливу параметрів моделі на рівень розвитку економіки країни.

Четвертий розділ присвячено функціонально-вартісному аналізу створення програмного продукту.

## РОЗДІЛ 1. ВВЕДЕННЯ В ТЕОРІЮ НЕЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

### 1.1 Передісторія

Уявімо наступну картину: в теплий літній день студентка прогулюється по сільській місцевості, намагається наловити хрущів та рахує кількість зловлених комах. І так вже не одне покоління студентів проводить даний ритуал, для подальшого аналізу даних. Результати аналізу наведені на Рис.1.1.

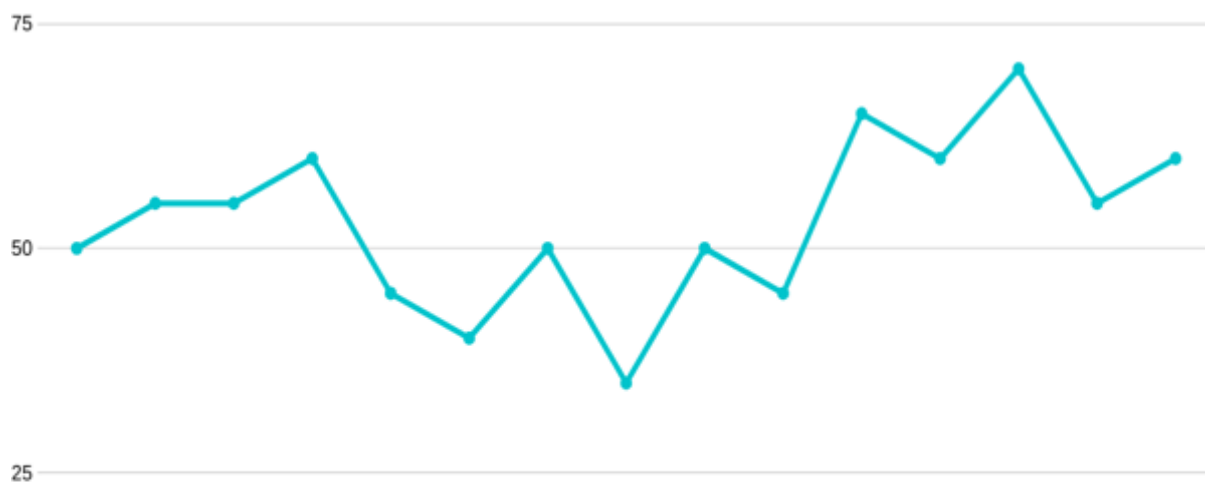


Рисунок 1.1 – Кількість , спійманих хрущів під час щорічного експерименту

Студентка вирішує проводити аналіз зміни популяції на основі фактичних вимірів. Тобто кількість хрущів в наступному році залежить від кількості яєць, яке залишили хрущі в цьому році. А кількість яєць буде залежати від кількості хрущів попереднього літа. Наступна функція відображає цей процес математично:

$$N_{t+1} = f(N_t) \quad (1.1)$$

Як і було сказано раніше, дана функція показує, що кількість хрущів  $(t + 1)$ -ого літа буде залежить кількістю хрущів  $t$ -ого літа.

Отже, на даному прикладі можемо дати визначення скінченно-різницевого рівняння. Це рівняння, що показує зв'язок між значеннями в дискретний проміжок часу.  $N_t$  – це стан системи в момент часу  $t$ . Для нас цікава зміна стану системи з плином часу: динаміка системи.

Проте відмітимо, що екологічна система є досить складною, тому треба розуміти, що модель, описана рівнянням (1.1) не може показувати точну реальну популяцію хрущів. Наприклад, на розмножування комах впливають кліматичні умови, біотичні та антропогенні фактори. Але висунуте припущення у рівнянні (1.1) може слугувати в якості робочого наближення.

## 1.2 Лінійні скінчено-різницеві рівняння

Зробимо припущення: кожний хрущ  $t$  – покоління матиме  $R$  – нащадків у поколінні  $(t + 1)$ . Тоді маємо скінченно-різницеве рівняння лінійного виду, оскільки графіком буде пряма з кутом нахилу  $R$ :

$$N_{t+1} = R \cdot N_t \quad (1.2)$$

Розв'язком рівняння (1.2) є послідовність станів  $N_1, N_2, N_3, \dots$ , які задовольняють рівність (1.2) для кожного  $t$ , тобто виконуються

$$N_2 = R \cdot N_1, N_3 = R \cdot N_2, N_4 = R \cdot N_3$$

Для розв'язання рівняння можна використати метод ітерацій, для цього необхідно знати кількість хрущів у першому досліджуваному поколінні -  $N_0$  (початкова умова). Тож, для знаходження  $N_1, N_2, N_3$ , тощо необхідно провести елементарні алгебраїчні підрахунки:

$$\begin{aligned}
N_1 &= R \cdot N_0, \\
N_2 &= R \cdot N_1 = R^2 \cdot N_0, \\
N_3 &= R \cdot N_2 = R^2 \cdot N_1 = R^3 \cdot N_0, \\
&\dots \\
N_t &= R^t \cdot N_0
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Шляхом заміни можемо перекоонатися, що рівність (1.3) є розв'язком рівняння (1.2). Так як рівність (1.3) виконується для будь-якого моменту часу  $t$ , тоді можемо зробити висновок, що виконується і для  $t + 1$ . Замінімо в (1.3)  $t$  на  $t + 1$  і отримаємо:

$$N_{t+1} = R^{t+1} \cdot N_0 = R \cdot R^t \cdot N_0 = R \cdot N_t$$

Отже, переконались, що рівність (1.3) є розв'язком рівняння (1.2).

#### *Поведінка лінійного рівняння*

Розглянемо декілька типів рішень рівняння (1.3) в залежності від значень параметра  $R$ :

- Розпад (при  $0 < R < 1$ ): кількість хрущів з кожним поколінням буде зменшуватись, а значить хрущі взагалі вимруть. Цей розпад називається експоненціальним, так як рішення є експоненціальною функцією часу. Графік даного розпаду зображений на Рис. 1.2:

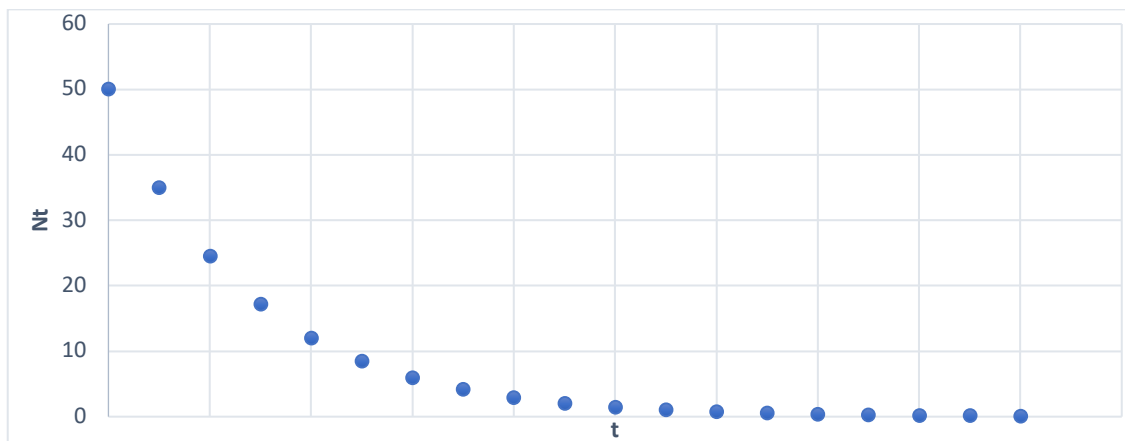


Рисунок 1.2 – Рішення для  $N_{t+1} = 0.7 \cdot N_t$



- Ріст (при  $R > 1$ ): популяція хрущів з кожним роком буде рости і прямувати до безкінечності. Дане рішення є експоненціальним ростом, зображений на Рис. 1.3:

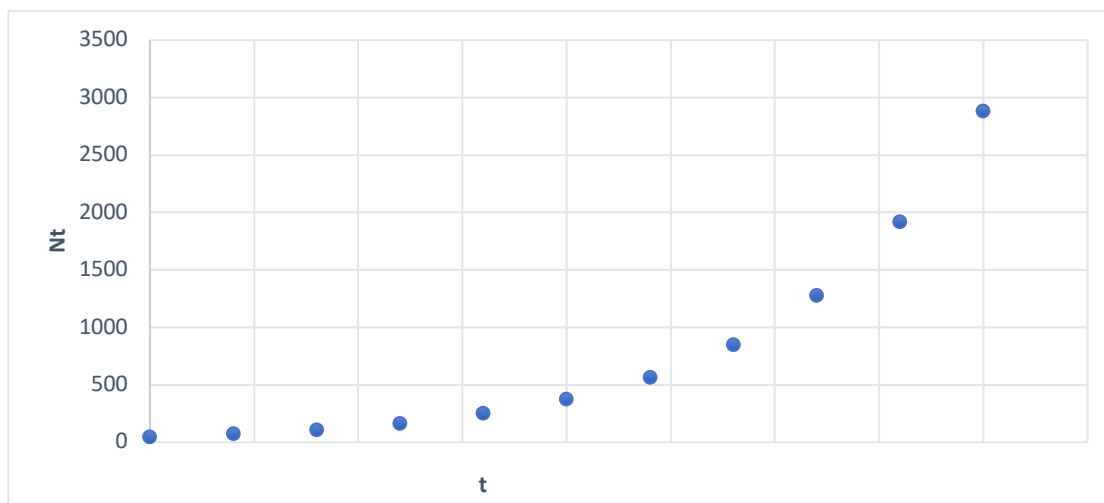


Рисунок 1.3 – Рішення для  $N_{t+1} = 1.5 \cdot N_t$

- Стаціонарна поведінка (при  $R = 1$ ): популяція хрущів залишається незмінною, що можна спостерігати на Рис. 1.4:

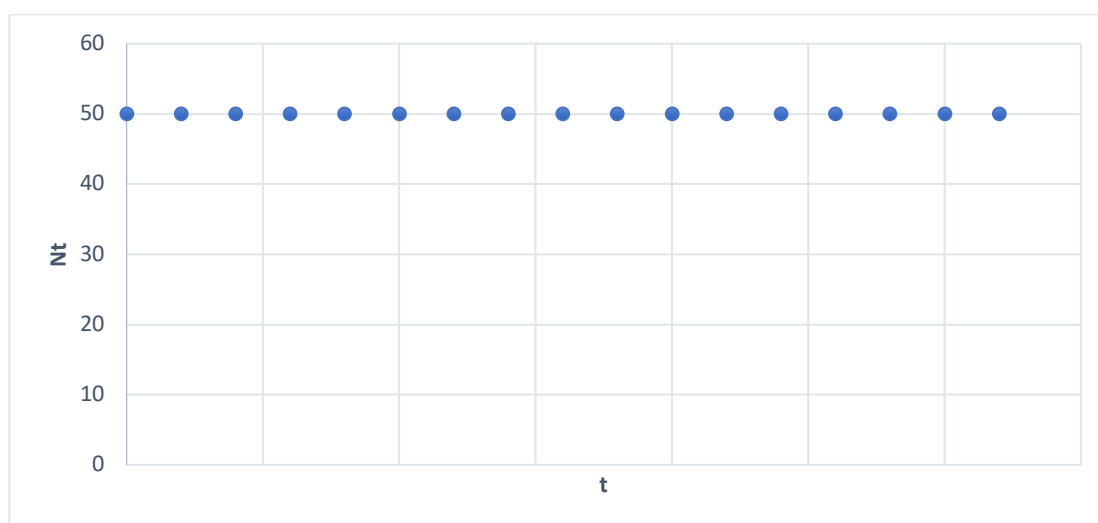


Рисунок 1.4 – Рішення для  $N_{t+1} = 1.00 \cdot N_t$

Немає сенсу розглядати випадки при  $R < 0$ , так як хрущі не можуть відкласти від'ємні яйця. Проте такі випадки існують і вони породжують різні види поведінки:

- Альтернативний розпад (при  $-1 < R < 0$ ) розв'язок рівняння (1.2) має як додатні, так і від'ємні значення. Модуль значень експоненціально спадає до нуля. Графік даного розпаду зображений на Рис. 1.5:

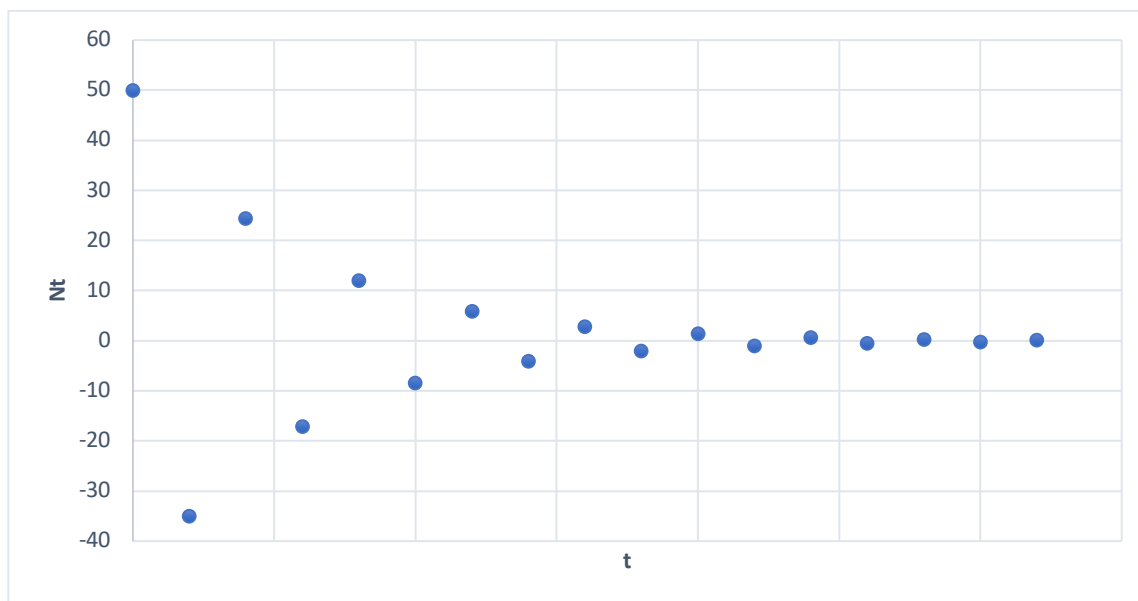


Рисунок 1.5 – Рішення для  $N_{t+1} = -0.7 \cdot N_t$

- Альтернативний ріст (при  $R < -1$ ): розв'язок також міняється між додатними та від'ємними значеннями, а модуль значень експоненціально зростає, як показано на Рис. 1.6:

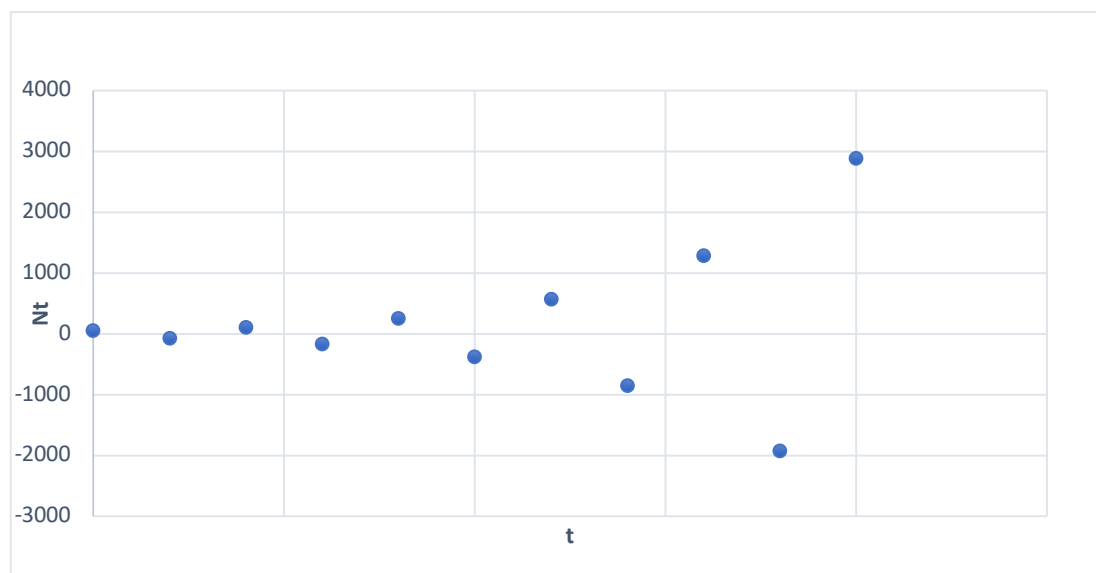


Рисунок 1.6 – Рішення для  $N_{t+1} = -1.5 \cdot N_t$

- Періодичний цикл (при  $R = -1$ ) значення по модулю не змінюються, а сам розв'язок чергується між додатнім та від'ємним початковим значенням, тобто  $N_0$  та  $-N_0$ , як зображено на Рис. 1.2:

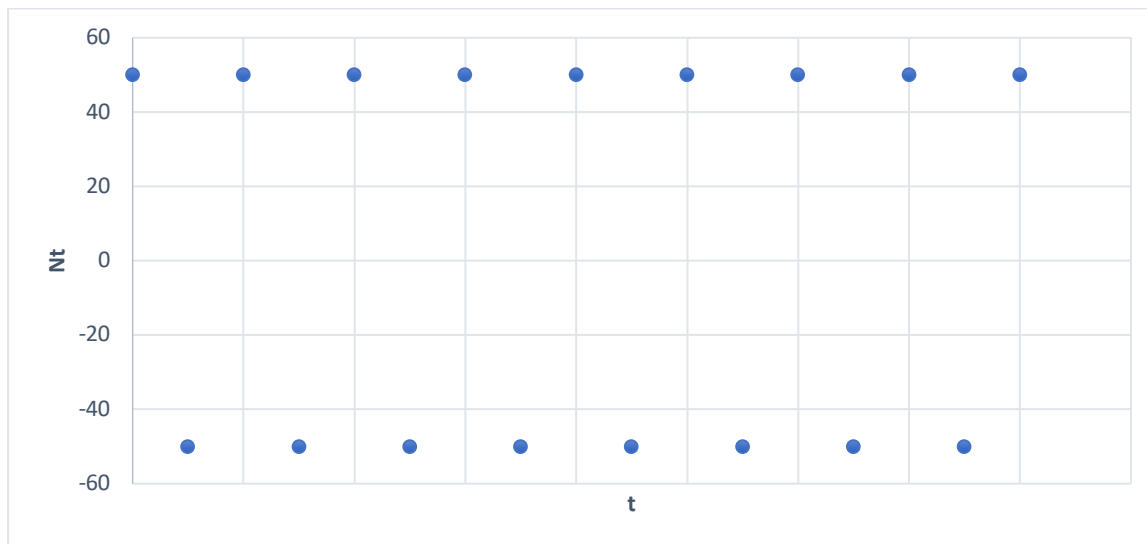


Рис. 1.7 Рішення для  $N_{t+1} = -1.00 \cdot N_t$

### 1.3 Ітераційні методи

У цьому розділі розглянемо два ітераційних методів для скінченно-різницевого рівнянь, а саме: павутинний метод та метод числових ітерацій. Так як не завжди можна розв'язати рівняння за допомогою простих алгебраїчних дій.

- Павутинний метод - це графічний ітераційний метод скінченно-різницевого рівнянь, тобто не потрібно проводити обчислювальні операції, достатньо зобразити функцію  $f(N_t)$  графічно [13].

Для наглядного прикладу будемо використовувати рівняння (1.2)

1) Будуємо функцію

$$f(N_t) = R \cdot N_t$$

при  $R = 1.5$  та з початковою умовою  $N_0 = 2$  наше скінченно-різницево рівняння матиме вигляд  $N_{t+1} = 1.5 \cdot N_t$ . Графік нашої функції

позначений зеленою лінією на рис. 1.8.

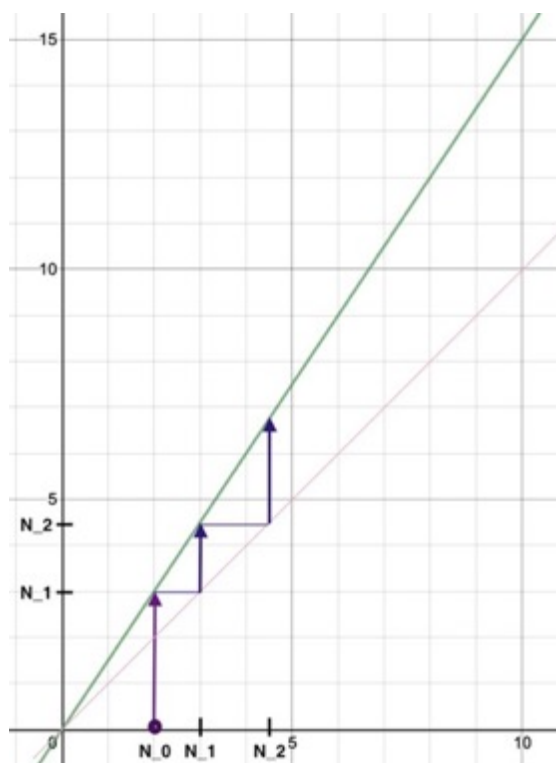


Рисунок 1.8 – Павутинний метод, застосований для лінійної динамічної системи  $N_{t+1} = 1.5 \cdot N_t$

- 2) Накреслимо вертикальну лінію від точки  $N_0$  на осі абсцис до самої функції. Точка, в якій проведена лінія пересікається з графіком функції є значенням точки  $N_1$ .
- 3) Відмітимо точку  $N_1$  на осі абсцис і від неї накреслимо пряму до графіка функції, отримали точку  $N_2$ . Для зручності будуємо пряму під нахилом  $45^\circ$  (позначено рожевим кольором), точка, в якій горизонтальна лінія пересікає пряму – це та точка, з якої можна будувати вертикальну пряму для пошуку  $N_2$ .
- 4) Повторюємо цей процес для знаходження наступних точок.

З рисунка 1.8 бачимо, що значення кожної наступної ітерації більше за попереднє і зростає до нескінченності. Отже, алгебраїчний метод і павутинний метод дають однаковий результат при  $R > 1$ .

- Метод числових ітерацій – процедура, яка легко виконується за допомогою калькулятора. Продемонструємо цей метод на прикладі: нехай, ми хочемо знайти розв’язок рівняння при  $N_0 = 50$ ,  $R = 0.6$ :

$$\begin{aligned}
 N_{t+1} &= R \cdot N_t, \\
 N_1 &= f(N_0) = 0.6 \cdot 50 = 30; \\
 N_2 &= f(N_1) = 0.6 \cdot 30 = 18; \\
 N_3 &= f(N_2) = 0.6 \cdot 18 = 10.8; \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Павутинний метод і метод числових ітерацій дозволяє наглядно переконатися в існуванні різних видів поведінки розв’язку рівняння (1.2), який було знайдено алгебраїчно. Павутинний метод і метод числових ітерацій вимагають задання початкових умов, які не завжди можуть бути відомими. Проте в нелінійних рівняннях ці методи, можуть гарантувати знаходження розв’язку, на відміну від алгебраїчного.

#### 1.4 Нелінійні скінченно-різницеві рівняння

В моделі рівняння (1.2) не передбачено жодних факторів, які можуть впливати на популяцію хрущів у природі, тому це говорить, що модель, яку ми розглядали раніше майже не відповідає реальному розмножуванню комах. Не дивлячись на те, що швидкий ріст популяції при низькій щільності цілком допустимий, при високій чисельності хрущів росте конкуренція за їжу, а також збільшується хижацтво, адже хижаки концентрують свою увагу на великих запасах їжі. Тому добавимо новий термін до нашої моделі (1.2), який буде зменшувати кількість комах, які вижили при великій популяції. У лінійному рівнянні параметр  $R$  відповідав за число нащадків кожної комахи в поколінні  $t$ . Для зменшення кількості

нащадків, коли зростає  $N_t$ , можна зробити коефіцієнт росту функцією  $N_t$ . Для цього введемо функцію

$$(R - bN_t)$$

де  $b > 0$  – відповідає за зменшення темпи росту населення;

$R$  – темпи росту, коли населення дуже мале.

Отже, отримали нове скінчено-різницеve рівняння:

$$N_{t+1} = (R - bN_t) \cdot N_t = RN_t - bN_t^2 \quad (1.5)$$

З виду цього рівняння можна побачити, що це рівняння є нелінійним, адже права частина не є рівнянням прямої. В рівнянні (1.5) маємо параметри  $R$  і  $b$ , які можуть змінюватися незалежно. Проте проста заміна змінних показує, що існує лише один параметр, котрий впливає на динаміку.

Маємо нову змінну  $x_t = \frac{bN_t}{R}$  – масштабує кількість хрущів за кількістю  $\frac{b}{R}$ . Підставимо  $x_t$  і  $x_{t+1}$  в рівняння (1.5) та отримуємо:

$$x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t) \quad (1.6)$$

Дане рівняння можна вирішити павутинним методом. Спочатку необхідно накреслити графік функції з  $R = 1.5$ , як показано на Рис. 1.9:

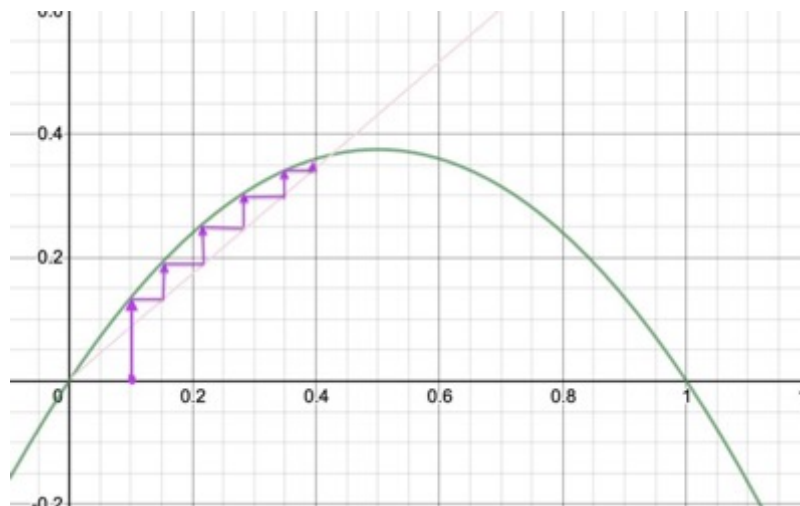


Рисунок 1.9 – Павутинний метод, застосований до  $x_{t+1} = 1.5(1 - x_t)$

Як бачимо з графіка, маємо параболу з перетинами в точках  $x_t = 0$  та  $x_t = 1$ .

Розглянемо конкретні значення для параметра  $R$ , щоб вивчити поведінку рівняння.

- Стійкий стан. Нелінійне рівняння може мати розв'язок, яке наближається до певного положення і залишається фіксованим.

При  $R = 1.5$  розв'язок має монотонний підхід (рис.1.10), тобто піднімається в стійкому стані з однієї сторони.

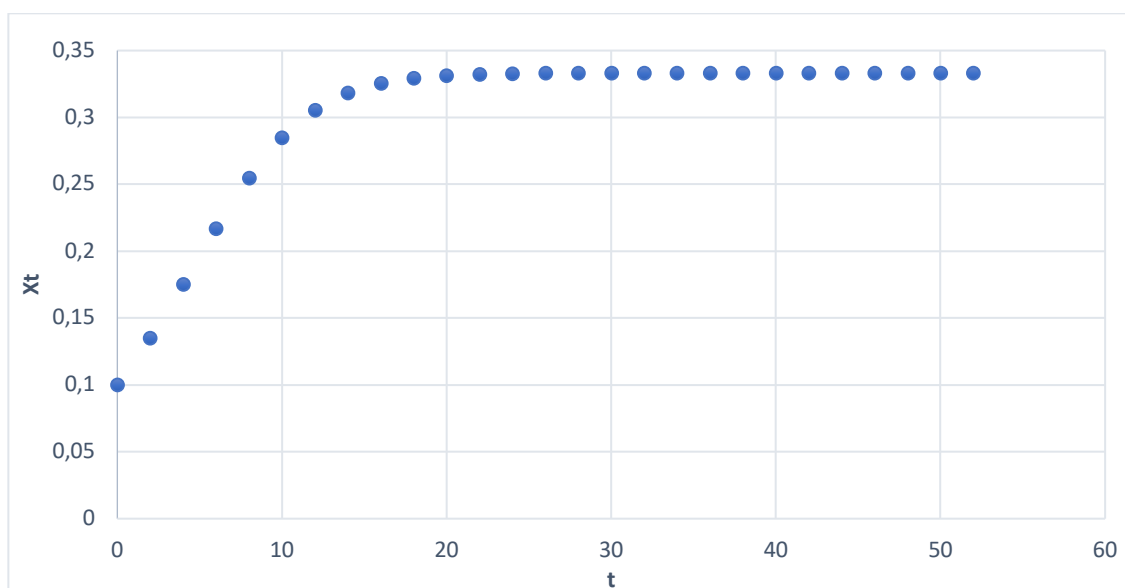


Рисунок 1.10 – Розв'язок  $x_{t+1} = 1.5(1 - x_t)$

При  $R = 2.9$  підхід до встановленого стану може чергуватися від однієї сторони до іншої, як показано на Рис.1.11.

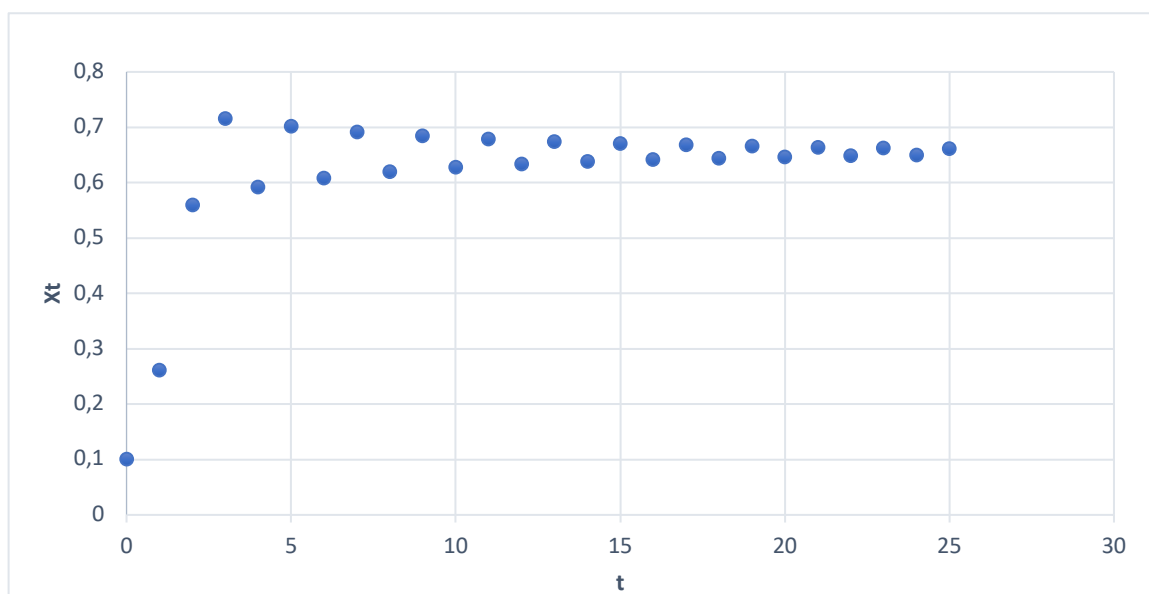


Рисунок 1.11 – Розв’язок  $x_{t+1} = 2.9(1 - x_t)$

- Періодичні цикли. Як показано на рис. 1.12 та рис.1.13 в розв’язку нелінійного рівняння є цикли. Для  $R = 3.3$  цикл має довжину 2.

Коли виконується ітерація в павутинному методі, цикл періоду має вигляд квадрату (рис.1.12). Цикл у цьому випадку відповідає послідовності точок:  $x_t = 0.48, x_{t+1} = 0.82, x_{t+2} = 0.48$  і так далі.

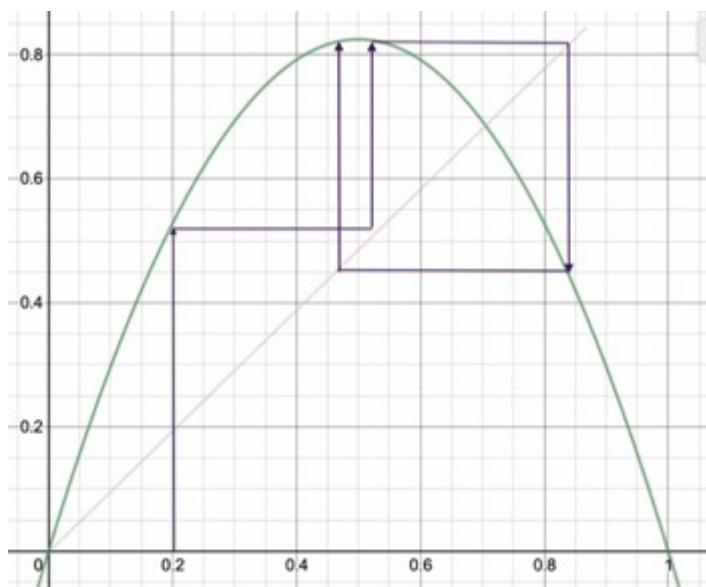


Рисунок 1.12 – Павутинна ітерація для  $x_{t+1} = 3.3(1 - x_t)$



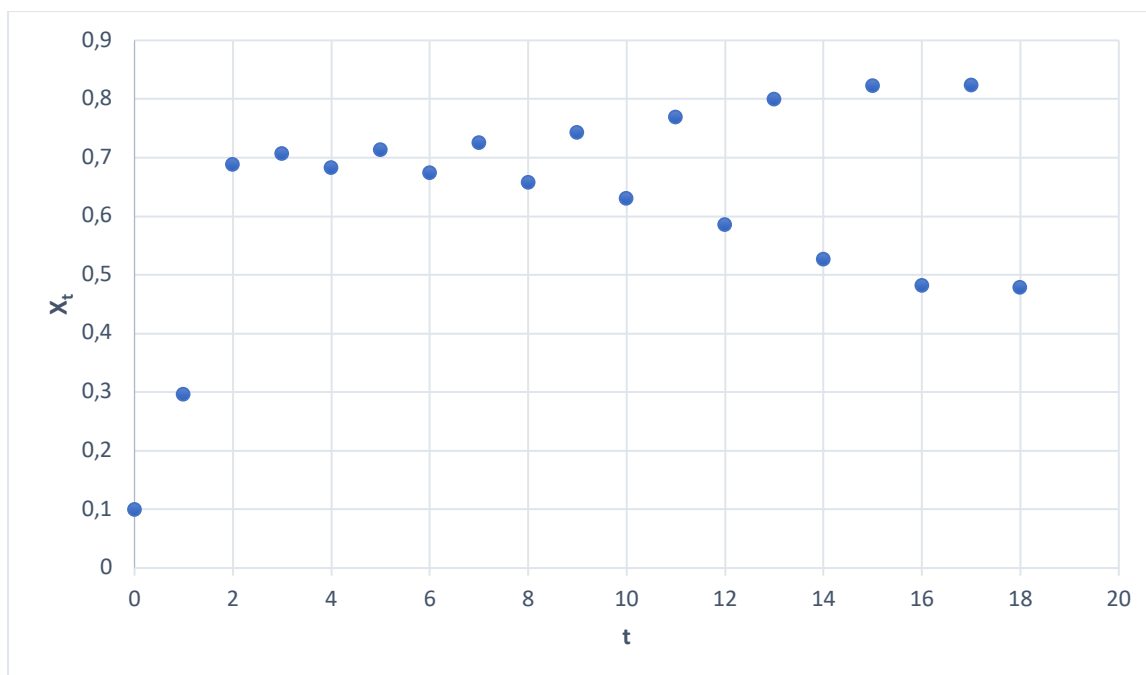


Рисунок 1.13 – Розв’язок  $x_{t+1} = 3.3(1 - x_t)$

– Аперіодична поведінка. Розв’язок нелінійного рівняння може коливатися, але не періодично. Для прикладу розглянемо розв’язок рівняння з  $R = 4$ , як видно на рис.1.14 та рис.1.15 коливання є нерегулярні, тобто не можна спостерігати ні експоненціального росту, ні експоненціального затухання, а ні стаціонарного стану. Ітерація павутинним методом показує, як неправильна ітерація із-за форми функції (рис.1.14). Така поведінка називається хаосом.

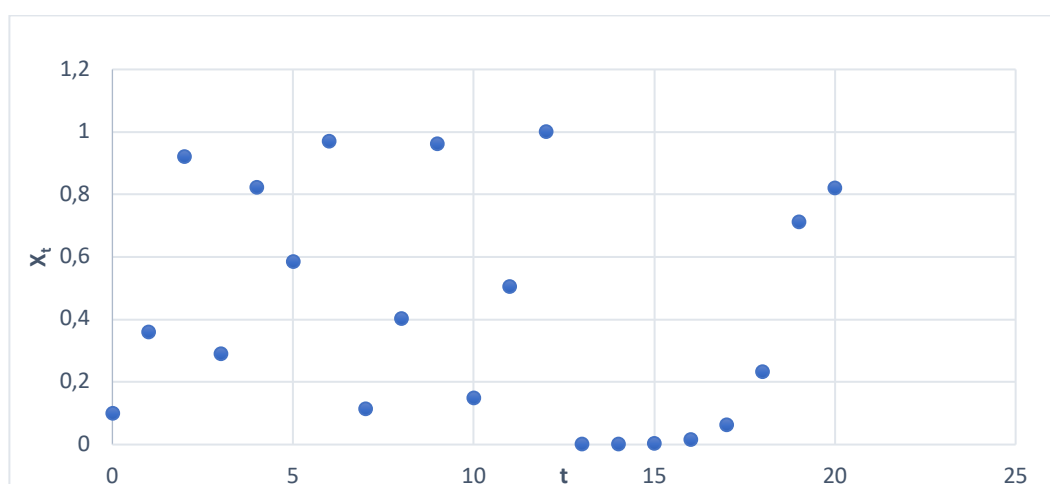


Рисунок 1.14 – Розв’язок  $x_{t+1} = 4(1 - x_t)$

Представимо павутинний метод для даного рівняння (Рис. 1.15):

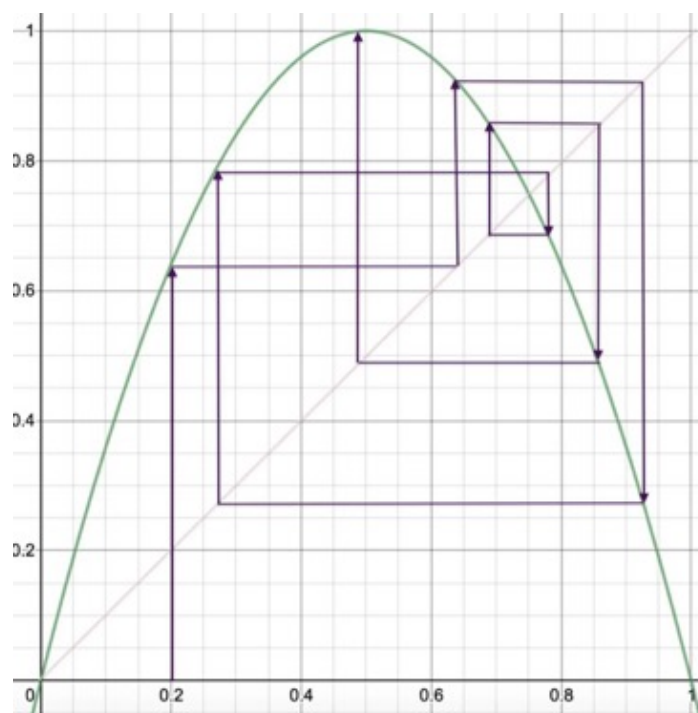


Рис. 1.15. Павутинна ітерація для  $x_{t+1} = 4(1 - x_t)$

### 1.5 Стаціонарні стани та їх стабільність

Простий, але важливий тип динамічної поведінки – це коли система знаходиться в стійкому стані. Стійкий стан – це стан системи, яке залишається фіксованим, тобто:

$$x_{t+1} = x_t$$

Стійкий стан скінчено-різницевого рівняння зв'язаний з таким математичним поняттям, як фіксована точка. Фіксована точка функції  $f(x_t)$  – це значення  $x_t^*$ , яке задовольняє умові:

$$x_t^* = f(x_t^*)$$

*Знаходження фіксованих точок*

Фіксовані точки легко знаходити по графіку

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

це точки, де графік перетинає лінію  $x_{t+1} = x_t$  або можна алгебраїчно розв'язати рівняння  $x_t = f(x_t)$ .

Для лінійного скінчено-різницевого рівняння,  $x_t^*$  є фіксованою точкою, якщо задовольняє рівняння  $x_t^* = Rx_t^*$ . Одним з розв'язків цього рівняння завжди є точка  $x_t^* = 0$ , крім випадку коли  $R = 1$ . Якщо  $R = 1$ , то всі точки є фіксованими. Звісно, що це винятковий випадок, адже будь-яка зміна в  $R$  усуне всі фіксовані точки, крім тої, яка знаходиться в початку координат.

Нелінійне скінченно-різницеве рівняння може містити більше ніж одну фіксовану точку. Також фіксовану точку можна знайти з-за допомогою алгебраїчних дій: знаходження коренів рівняння.

$$x_t = Rx_t(1 - x_t) \text{ або } x_t(R - Rx_t - 1) = 0 \quad (1.6)$$

Корені рівняння 1.6:  $x_t = 0$ ;  $x_t = \frac{R-1}{R}$ .

Для прикладу взято рівняння 1.6 з параметром  $R = 2.9$  (Рис.1.16):

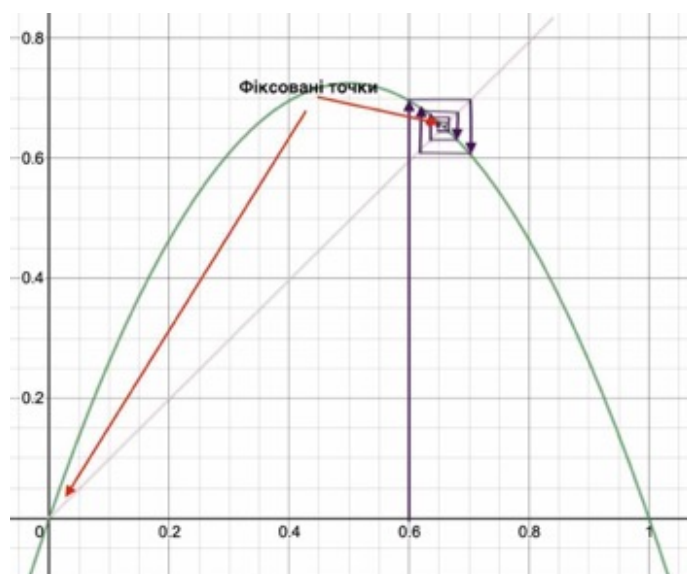


Рисунок 1.16 – Фіксовані точки для  $x_{t+1} = 2.9(1 - x_t)x_t$

В нашій моделі біологічний інтерпретація кореня  $x_t = 0$  в тому, що хрущі не з'являються нізвідки, а біологічний сенс точки  $x_t = \frac{R-1}{R}$  полягає в тому, що це самопідтвердуючий рівень населення, який збільшується. Звісно, популяція хрущів не може одночасно знаходитися в двох точках, тому потрібно розглянути питання про те, яка з фіксованих точок буде досягнута шляхом ітерацій з початкової умови і чи є ця точка взагалі.

### *Локальна стабільність фіксованих точок*

Фіксована точка є локально стійкою, якщо при достатніх початкових умовах, близькому к фіксованій точці, всі наступні ітерації в результаті наближаються к фіксованій точці.

Для визначення стійкості фіксованої точки нелінійному скінченно-різницевого рівнянню можна, щоб обмежених областях крива може бути апроксимована прямою лінією відповідного нахилу. Тому в околиці перетину прямої  $x_{t+1} = x_t$  з кривою  $x_{t+1} = f(x_t)$  можна апроксимувати криву прямою.

Нехай  $x^*$  - фіксована точка функції  $f(\cdot)$ , тобто стан, для котрого  $x^* = f(x^*)$ . Нахил кривої в фіксованій точці,  $\frac{df}{dx_t}|_{x^*}$ , визначає стабільність фіксованої точки, позначимо цей нахил по  $m$ .

- Якщо  $|m| < 1$ , то фіксована точка є стійкою, тому сусідні точки наближаються до фіксованої точки з кожною наступною ітерацією.
- Якщо  $|m| > 1$ , то фіксована точка є нестабільною, і точки покидають область фіксованої точки.
- Якщо  $m < 1$ , то точки наближаються або покидають фіксовану точку в монотонній формі.
- Якщо  $m > 1$ , то точки наближаються або покидають фіксовану точку в коливальній формі.

Рисунки з 1.17 до 1.20 ілюструють чотири випадки, які демонструють область перетину.

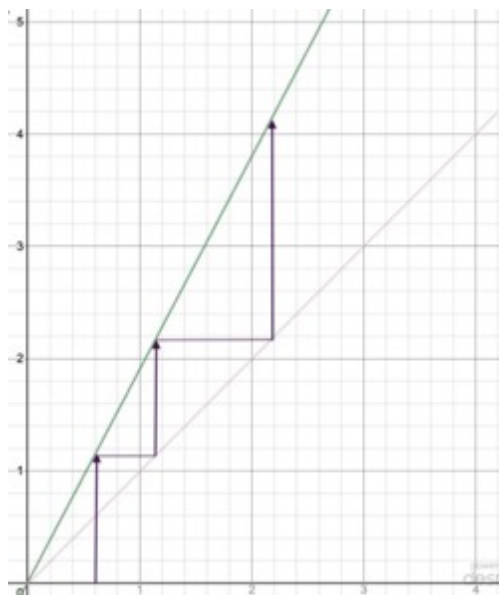


Рисунок 1.17 – Динаміка  $y_{t+1} = my_t$ ,  $m > 1$  монотонне зростання при  $m = 1.9$

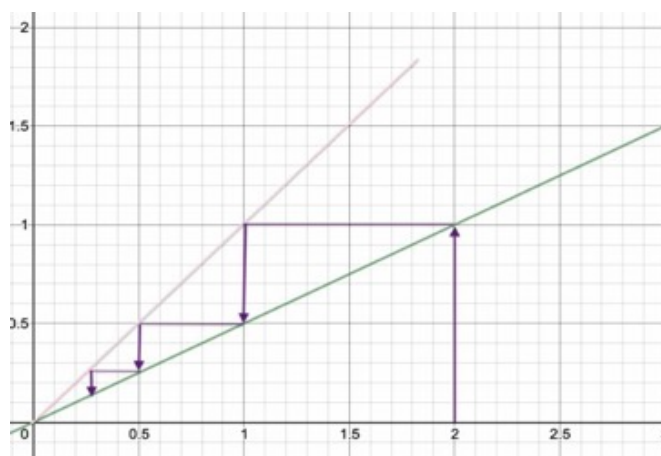


Рисунок 1.18 – Динаміка  $y_{t+1} = my_t$ ,  $0 < m < 1$  виробляє монотонне спадання до  $y_t = 0$  при  $m = 0.5$

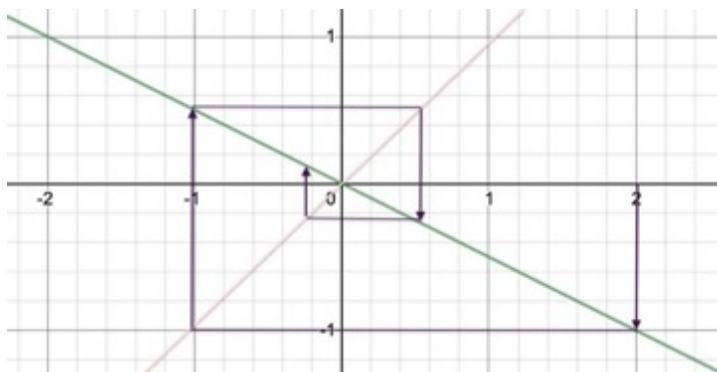


Рисунок 1.19 – Динаміка  $y_{t+1} = my_t$ ,  $-1 < m < 0$  виробляє альтернативне спадання при  $m = -0.5$ .

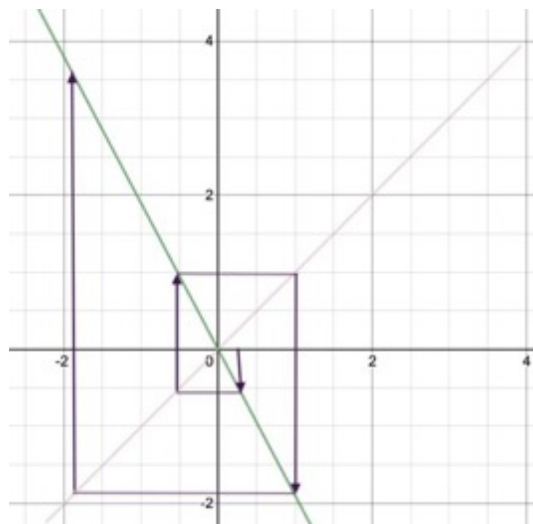


Рисунок 1.20 – Динаміка  $y_{t+1} = m y_t$ ,  $m < -1$  виробляє альтернативне зростання при  $m = -1.9$ .

Можемо описати метод для визначення стійкості фіксованої точки в скінченно-різницевиx рівняннях з однією варіацією:

- 1) Розв'язати рівняння виду  $x_t = f(x_t)$ . Нелінійні рівняння можуть мати більше ніж одну фіксовану точку, тому кроки 2 і 3 можна використовувати до кожної точки по одному за раз. Нехай обрану фіксовану точку позначаємо за  $x^*$ ,  $x^* = f(x^*)$ .
- 2) Розрахуємо нахил  $m$  функції  $f(x_t)$ , оцінюючи  $x_t$  в фіксуєчій точці  $x^*$ . Тобто обчислюємо:

$$m = \frac{df}{dx_t|_{x_t=x^*}}$$

- 3) Нахил  $m$  в фіксованій точці визначає його стійкість:

$1 < m$  – нестабільність, експоненціальне зростання;

$0 < m < 1$  – стабільність, монотонний підхід до  $y_t = 0$ ;

$-1 < m < 0$  – стабільність, коливальний підхід до  $y_t = 0$ ;

$m < -1$  – нестабільність, коливальне експоненціальне зростання.

- Перехідна і асимптотична поведінка

Якщо фіксована точка є локально стійкою, то коли положення дуже близьке до фіксованої точки, воно буде залишатися близьким і надалі. До того, як стан наблизиться до фіксованої точки, воно може демонструвати і іншу поведінку. Прикладом може слугувати рис.1.10. спочатку стан до фіксованої точки достатньо далеко на перших 5-6 ітераціях. Після цього досягається фіксована точка. На рис.1.11 рух в напрямку фіксованої точки досягається приблизно за двадцять ітерацій.

*Глобальна стійкість фіксованих точок*

У багатьох випадках дослідження фіксованої точки на глобальну стійкість є більш складним, ніж аналіз на локальну стабільність. Нелінійне скінченно-різницеве рівняння може містити декілька фіксованих точок, тоді ні одна з фіксованих точок не буде глобально стабільною.

Початкові умови, які в результаті приводять до фіксованої точки, називають басейном дій фіксованої точки. Якщо декілька фіксованих точок є стабільними, то можна казати, що існує мультистабільність.

## 1.6 Цикли та їх стабільність

Періодичні цикли є однією з форм поведінки для скінченно-різницевого рівнянь. У повсякденному житті цикл – це дія, яка повторюється, а період – це тривалість між повтореннями.

Існує корисна відповідність між фіксованими точками та періодичними циклами, що допомагає знайти цикл та оцінити його стійкість. Для прикладу розглянемо рівняння:

$$x_{t+1} = f(x_t) = 3.3(1 - x_t)x_t \quad (1.7)$$

Як видно з рис.1.13 розв'язком рівняння є період циклу – 2, тобто  $x_{t+2} = x_t$ . Підставляючи в  $x_{t+1} = f(x_t)$ , можна записати для  $x_{t+2}$ :

$$x_{t+2} = f(x_{t+1}) = f(f(x_t)) \quad (1.8)$$

Якщо період циклу дорівнює 2, тоді  $x_t = f(f(x_t))$ . Для квадратичного рівняння (1.6) можемо знайти  $f(f(x_t))$  за допомогою алгебраїчних перетворень:

$$\begin{aligned} f(f(x_t)) &= Rx_{t+1} - Rx_{t+1}^2 = R(Rx_t - Rx_t^2) - R(Rx_t - Rx_t^2)^2 \\ &= R^2x_t - (R^2 + R^3)x_t^2 + 2R^3x_t^2 - R^3x_t^4 \end{aligned} \quad (1.9)$$

З рівняння (1.8) можна побачити, що існує аналогія між фіксованими точками і циклами: якщо

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

має цикл періоду 2, то функція  $f(f(x_t))$  має принаймні дві фіксовані точки. Таким чином, ми можемо знайти цикли періоду 2, розв'язавши рівняння:

$$x_t = f(f(x_t))$$

Це можна зробити графічно або алгебраїчно.

Один тривіальний тип рішення  $x_t = f(f(x_t))$  - це розв'язок  $x_t = f(x_t)$ . Розв'язками будуть фіксовані точки  $(x_t)$ . Тобто відповідають циклу періоду 1. На рис 1.21, показано чотири фіксовані точки  $f(f(x_t))$ :

$$x_t = 0, x_t = 0.479, x_t = 0.697, x_t = 0.823$$



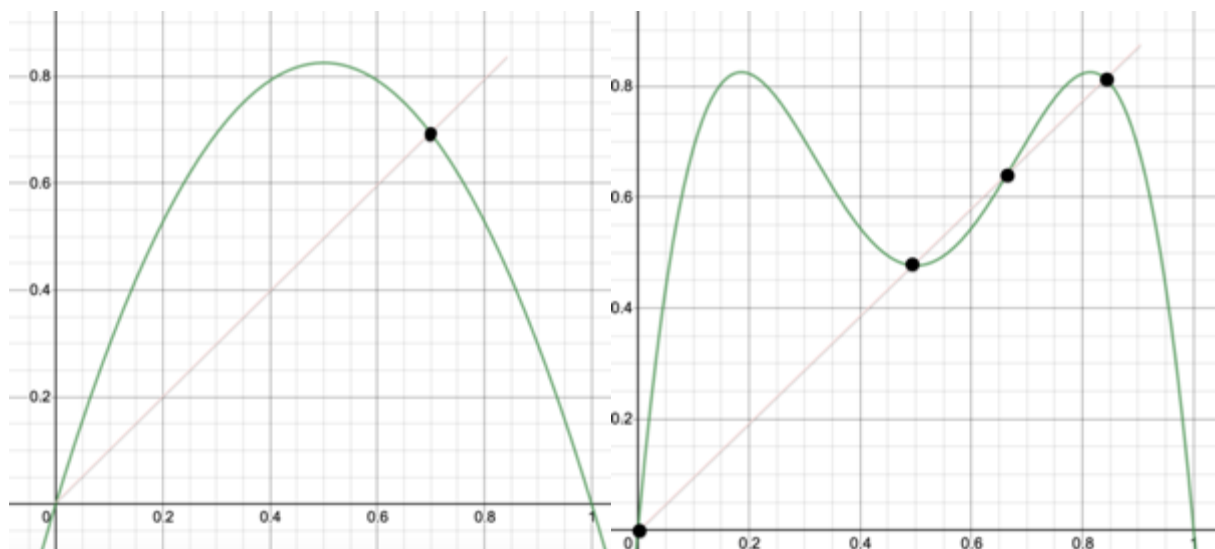


Рисунок 1.21 – Рівняння  $x_{t+1} = R(1 - x_t)x_t$  при  $R = 3.3$

Двоє з цих значень також є фіксованими точками  $f(x_t)$  і тому відповідають циклам періоду 1.

### *Стабільність циклів*

Подібно до того, як нерухома точка може бути локально стабільною або нестабільною, цикл також може бути стабільним або нестабільним. Ми говоримо, що цикл локально стабільний, якщо, враховуючи, існування початкових умов, близькі точки до циклу залишається близькими до циклу при наступних ітераціях.

Розглянемо стійкість фіксованих точок скінченно-різницевого рівняння

$$x_{t+2} = f(f(x_t))$$

Нехай  $x^*$  буде розв'язком рівняння  $x_t = f(f(x_t))$ . Стійкість нерухомої точки  $x_{t+2} = f(f(x_t))$  залежить від значення

$$\frac{df(f(x_t))}{dx_t} \Big|_{x^*} = \frac{df}{dx_t} \Big|_{f(x^*)} \frac{df}{dx_t} \Big|_{x^*}$$

Таким чином стійкість нерухомою точки періоду 2 залежить від нахилу функції  $f(x_t)$  в обох точках:  $f(x^*)$  і  $x^*$ .

Розглянемо скінченно-різницеve рівняння (Рис. 1.22):

$$x_{t+1} = \frac{1 - x_t}{3x_t + 1}$$

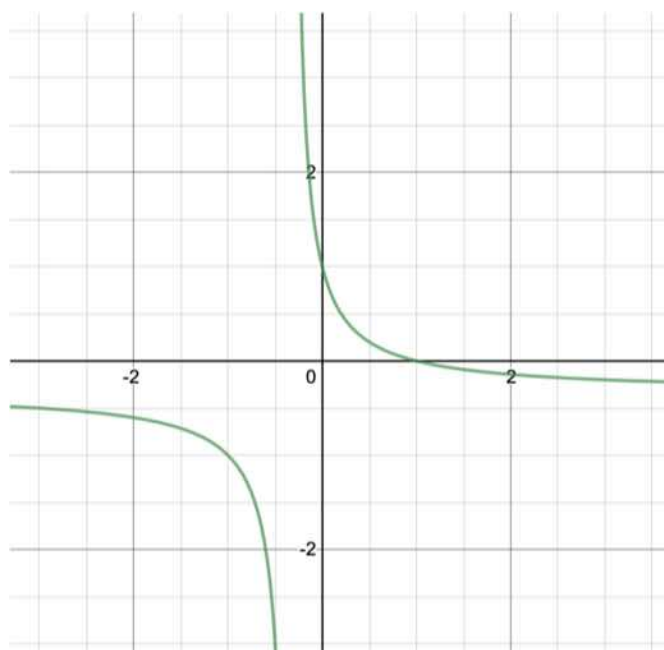


Рисунок 1.22 – Графік рівняння  $x_{t+1} = \frac{1-x_t}{3x_t+1}$

- З рис. 1.22. бачимо, що графіком даного рівняння є гіпербола, яка не має локальний точок, але є асимптоти  $x_t = -\frac{1}{3}$  і  $x_{t+1} = -\frac{1}{3}$ .
- Фіксовані точки знайдемо, розв'язавши квадратичне рівняння:

$$3x_t^2 + 2x_t - 1 = 0$$

Маємо два корені рівняння:  $x_t = \frac{1}{3}$ ;  $x_t = 1$ . Для визначення стійкості ми проводимо обчислення:

$$\frac{dx_{t+1}}{dx_t} = \frac{-4}{(3x_t + 1)^2}$$

Ми не можемо визначити стійкість стаціонарних станів з цього обчислення: стаціонарний стан не є ні стабільним, ні нестабільним.

- Знаходимо наступну ітерацію:

$$x_{t+2} = \frac{1 - x_{t+1}}{3x_{t+1} + 1} = \frac{1 - \left(\frac{1 - x_t}{3x_t + 1}\right)}{3\left(\frac{1 - x_t}{3x_t + 1}\right) + 1} = x_t$$

Всі початкові умови знаходяться на циклі періоду 2. Цикл є ні локально стабільним, ні локально нестабільним, оскільки близькі точки ні наближаються, ні розходяться від циклу.

Якщо є стабільний цикл періоду  $n$ , повинно бути принаймні  $n$  нерухомих точок, пов'язаних зі стійким циклом, де нахил у кожній із фіксованих точок рівний і значення нахилу в кожній із фіксованих точок менше ніж одиниця.

Розглянемо конкретне рівняння:

$$x_{t+1} = f(x_t) = 4(1 - x_t)x_t$$

На Рис. 1.23 зображена парабола, яка має дві нерухомі точки, обидві з яких нестабільні, оскільки нахил функції в цих фіксованих точках більший за 1.

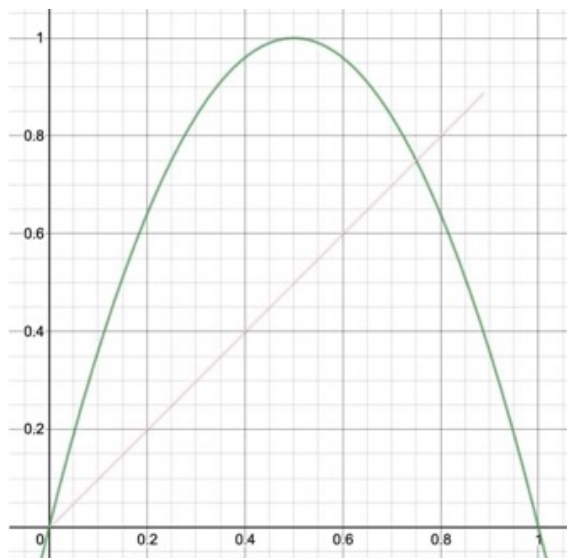


Рисунок 1.23 – Графік  $x_{t+1} = f(x_t) = 4(1 - x_t)x_t$

Щоб шукати цикли періоду 2, ми побудуємо графік  $x_{t+2}$  від  $x_t$ , як показано на Рис.1.24. Графік у чотирьох місця перетинається прямою з нахилом у 45 градусів. Тобто маємо можливі точки циклу періоду 2. Оскільки нахил функції у всіх точках більший за одиницю, робимо висновок, що не існує стабільних циклів періоду 2 у даному рівнянні.

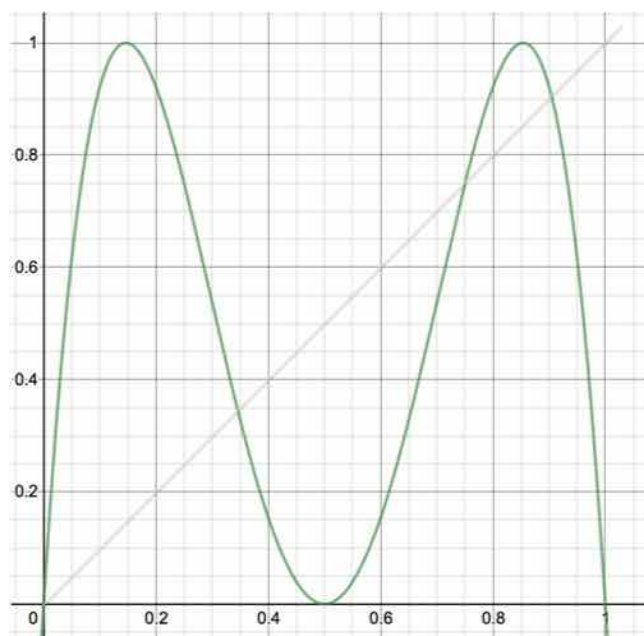


Рисунок 1.24 –  $x_{t+2}$  від  $x_t$  для рівняння  $x_{t+1} = f(x_t) = 4(1 - x_t)x_t$

Знайдемо цикл періоду 3 (Рис.1.25.). Як бачимо, стабільних циклів також немає.

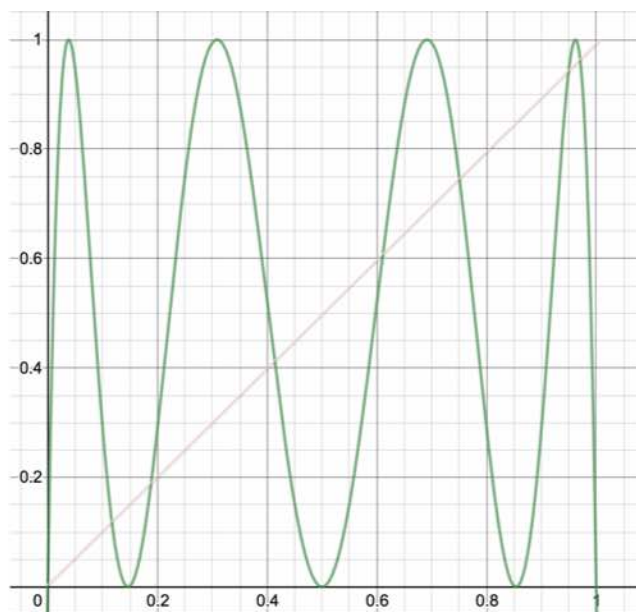


Рисунок 1.25 –  $x_{t+3}$  від  $x_t$  для рівняння  $x_{t+1} = f(x_t) = 4(1 - x_t)x_t$

Аналогічно, на Рис. 1.26 видно, що цикли четвертого періоду також нестабільні. Можна зробити висновок, що для даного рівняння стабільних циклів не існує.

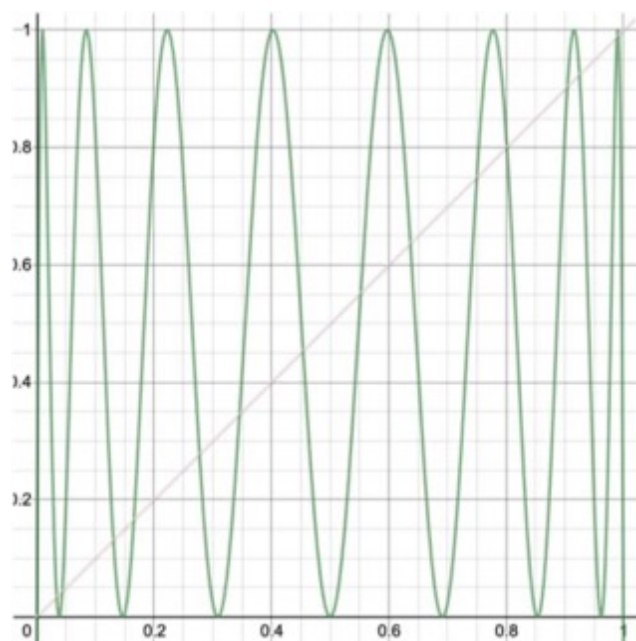


Рисунок 1.26 –  $x_{t+4}$  від  $x_t$  для рівняння  $x_{t+1} = f(x_t) = 4(1 - x_t)x_t$

## 1.7 Хаос

Проведемо чисельний експеримент, щоб оцінити властивості рівняння:

$$x_{t+1} = f(x_t) = 4(1 - x_t)x_t$$

Розглянемо Рис.1.27 :

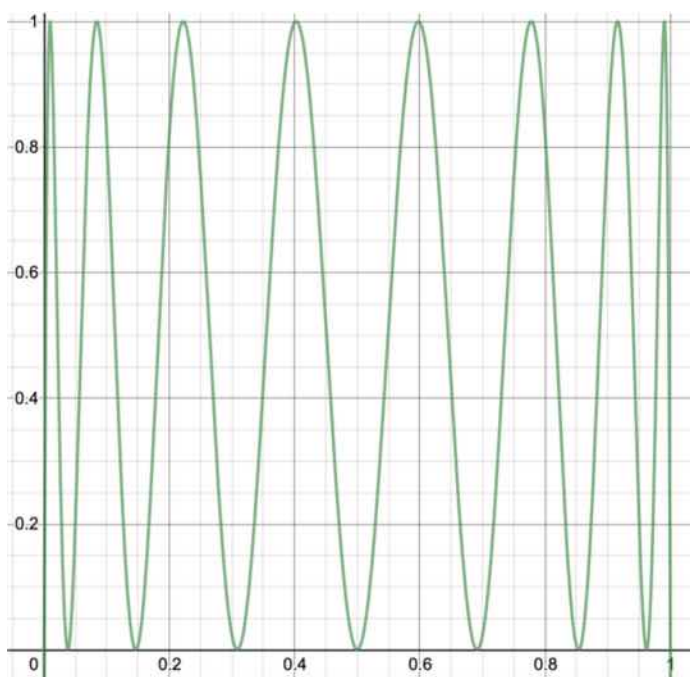


Рисунок 1.27 – Розв’язок рівняння  $x_{t+1} = f(x_t) = 4(1 - x_t)x_t$

З огляду Рис. 1.27 можна зробити висновок, що це рівняння відображає хаос, який визначається як аперіодична обмежена динаміка в детермінованій системі з чутливою залежністю від початкових умов. Розглянемо кожний з термінів більш детально [3].

- Аперіодичність означає, що одне положення не може повторюватися двічі. Хоча на практиці шляхом графічної ітерації або використання комп’ютера з кінцевою точністю цілком можливо приведе до того ж значення. Комп’ютерне моделювання або графічна ітерація завжди залишає деякі сумніви на рахунок того, чи є поведінка періодичною,

але довгі цикли або аперіодична динаміка у комп'ютерних моделях є частковим доказом хаосу.

- Обмеженість означає, що на послідовних ітераціях стан не наближується на нескінченності, а залишається кінцевим. В даному прикладі, поки початкова умова  $x_0$  належить проміжку  $[0; 1]$ , тоді всі наступні ітерації будуть також знаходитися в цьому діапазоні. Це пояснюється тим, що в рівнянні  $4(1 - x_t)x_t$ ,  $x_t$  в проміжку  $[0; 1]$  має мінімальне значення, яке дорівнює нулю, а максимальне – одиниця.
- Детермінованість означає значення величин, які отримуються в конкретний момент часу, повинні визначатися значеннями величин, отриманими в попередні моменти часу. Для одномірних, скінченно-різницевого рівнянь «детермінованість» означає, що для кожного значення  $x_t$  існує тільки одне вірогідне значення  $x_{t+1} = f(x_t)$ . Для детермінованої системи  $x_0$  можна використовувати для обчислення всіх наступних значень  $x_t$ .
- Чуттєва залежність від початкових умов означає, що дві точки, які є спочатку близькі, надалі розійдуться, це суттєвий аспект хаосу. Тобто, можна зробити передбачення на короткий проміжок часу, що відбудеться, проте на довгий період часу таке передбачення неможливе. Адже ми не можемо гарантувати точність значення початкової умови в будь-якій реалістичній системі. Навпаки, можливий випадок, коли для скінченно-різницевого рівняння зі стабільними фіксованими точками або циклами, дві трохи різні початкові умови в результаті можуть привести до фіксованої точки або циклу.

### *Шлях до хаосу з подвоєним періодом*

Як вже було сказано вище, просте скінченно-різницевого рівняння

$$x_{t+1} = R(1 - x_t)x_t$$

може мати різні типи поведінки в залежності від параметра  $R$ : стійкий стан, періодичні цикли різної довжини та хаос. Змін однієї форми поведінки на іншу при зміні параметра називається бифуркацією.

Існує багато видів бифуркації. Так, наприклад, в лінійному скінченно-різницевому рівнянні  $x_{t+1} = Rx_t$  при  $-1 < R < 1$  відбувається затухання до нуля, а при  $R > 1$  спостерігаємо експоненціальний ріст. Точка, в якій відбувається зміна поведінки із-за зміни  $R$  (в нашому випадку при  $R = 1$ ) бифуркаційна точка. У нелінійних рівняннях зустрічаються багато інших видів бифуркації. Наприклад, точка може перестати бути стабільною, або стійкий стан може перейти в коливальний цикл.

Рівняння (1.6) і багато інших нелінійних систем можуть містити бифуркацію з подвоєним періодом, такі скінченно-різницеві рівняння відображають послідовність бифуркації, в яких період коливання подвоюється при незначних змінах параметра.

Для бифуркації з подвоєним періодом введемо критерій: в нелінійному скінченно-різницевому рівнянні існує  $n$  нерухомих точок функції  $x_t = f(\dots f(x_t))$ , які пов'язані з періодом циклу. При зміні параметра нахил на кожній з цих точок також змінюється. Коли нахил для деякого значення параметра  $R$  дорівнює  $-1$ , часто можна виявити, що періодичний цикл періоду  $n$  втрачає свою стійкість, а періодичний цикл періоду  $2n$  набуває стійкість. Тобто відбувається бифуркація подвоєного циклу. Але, цей критерій не зовсім зручно використовувати для нелінійних рівнянь, так як в результаті отримуємо ітерації, які важко обчислюються. Тому, необхідно звернутися до чисельних досліджень.

Мітчелл Дж. Фейгенбаум досліджував бифуркацію подвоєного періоду рівняння (1.6) і в результаті прийшов до одного з основних



відкриттів в нелінійній динаміці. Фейгенбаум спостерігав, що зміна параметра  $R$  призводить до послідовного подвоєння періоду коливання. Отримав наступні чисельні оцінки  $R$  при послідовній буфуркації:

- Для  $3.0000 < R < 3.4495$  існує стабільний цикл з періодом 2;
- Для  $3.4495 < R < 3.5441$  існує стабільний цикл з періодом 4;
- Для  $3.5441 < R < 3.5644$  існує стабільний цикл з періодом 8;
- Для  $3.5644 < R < 3.5688$  існує стабільний цикл з періодом 16;
- Для  $R$  збільшеного до 3.570, існує стабільний цикл з періодом  $2n$ , де період циклу збільшується з приближенням до 3.570;
- Для  $R > 3.570$  існує вузький діапазон періодичних розв'язків, а також властива аперіодична поведінка.

Ці результати ілюструють послідовність біфуркації подвоєного циклу при  $R = 3.0000$ ,  $R = 3.4495$ ,  $R = 3.5441$ ,  $R = 3.5644$  з додатковим подвоєнням періоду при збільшенні  $R$ . Перехід в стійких періодичних циклів до хаотичної поведінки при  $R = 3.570$  називається шляхом до хаосу з подвоєним періодом. Діапазон значень для кожного наступного періодичного циклу стає вужчим. Нехай  $\Delta_n$  – діапазон значень  $R$ , які роблять цикл періоду  $n$ . Оскільки  $3.4495 < R < 3.5441$  дає цикл періоду 4, маємо, що

$$\Delta_4 = 3.5441 - 3.4495 = 0.0946$$

Аналогічно, маємо для

$$\Delta_8 = 3.5644 - 3.5441 = 0.0203$$

Тому  $\frac{\Delta_4}{\Delta_8} = 4.6601$ , враховуючи наступний період подвоєним, Фейгенбаум виявив число:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{\Delta_{2n}} = 4.6692 \dots$$

## 1.8 Квазіперіодичність

У хаотичній динаміці існує такий тип аперіодичної поведінки, при якому дві точки, які з самого початку були близькі, близькими і залишаються протягом часу, такий тип називається квазіперіодичність. В квазіперіодичності відсутні такі поняття як нерухома точка, цикл та хаос. На прикладі розглянемо, як з'являється такий тип поведінки:

$$x_{t+1} = f(x_t) = x_t + b \pmod{1}$$

де  $\pmod{1}$  – оператор «остача».

Щоб провести процес ітерацій в даному рівнянні, ми вираховуємо  $x_t + b$  і беремо остачу. Наприклад, нехай  $x_t = 0.9$  і параметр  $b = 0.3$ , отримуємо:

$$(x_t + b) \pmod{1} = 1.2 \pmod{1} = 0.2,$$

$$\begin{aligned} x_{t+2} &= (x_{t+1} + b) \pmod{1} = ((x_t + b) \pmod{1} + b) \pmod{1} = \\ &= ((x_t + 2b) \pmod{1}), \end{aligned}$$

$$x_{t+n} = f^n(x_t) = ((x_t + nb) \pmod{1})$$

Тоді, якщо  $nb(mod 1) = 0$ , то всі значення знаходяться у циклі періоду  $n$ , в протилежному випадку ніяких значень не буде.

Один із способів перевірити - це порівняти з одометром автомобіля, що показує загальний пробіг автомобіля. Представимо, що одометр має десятинну точку і показує значення від нуля до одиниці. Кожен день авто проїжджає  $b$  кілометрів і після досягнення відмітки 0.9999, одометр скидається до нуля.  $x_t$  буде відповідати за показник на одометрі в кінці поїздки в день  $t$ . На Рис.1.28 можна побачити графік рівняння 1.14 для випадку, коли  $b = \frac{1}{\pi}$ .

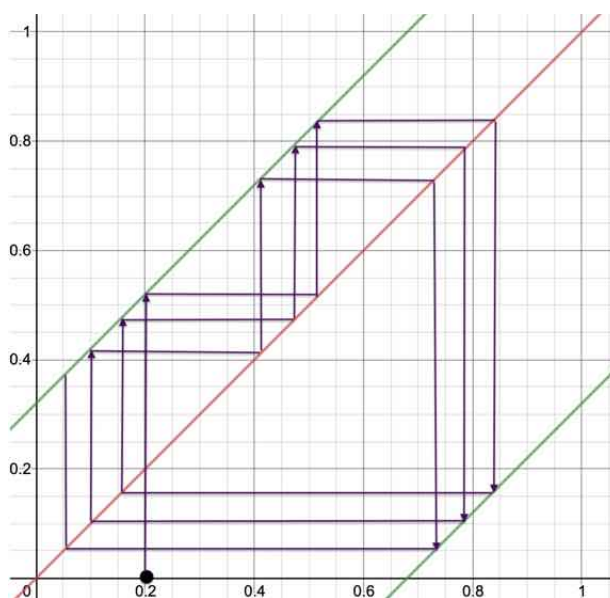


Рисунок 1.28 – Ітерація  $x_{t+1} = \frac{1}{\pi} (mod 1)$ . Приклад квазіперіодичної динаміки

Графік показує, що функція не має фіксованих точок, тому що немає перетинів функції з лінією  $x_{t+1} = xt$ . Павутинна діаграма для декількох ітерацій показує, що цикл відсутній, але близькі точки залишається близькими з кожною наступною ітерацією. Тому динаміка схожа на квазіперіодичну.

Чи можемо ми бути переконані, що періодичні точки ніколи не з'являться, незалежно від того, скільки ітерацій проведемо? Так як  $\frac{n}{\pi}$  ірраціональне число, значить  $\frac{n}{\pi} \pmod{1}$  не може дорівнювати нулю для будь-якого цілого числа  $n$ . Отже, не може бути жодних періодичних циклів для рівняння (1.11) при  $b = \frac{1}{\pi}$ . Крім того, з алгебраїчних ітерацій видно, що ітерація двох близьких початкових умов залишається дуже близькою. Тому робимо висновок, що динаміка є квазіперіодичною.

Інша область, в якій часто спостерігається квазіперіодична динаміка, є кардіології. В одному серці може бути кілька різних кардіостимуляторів. Зазвичай один відповідає і встановлює ритм всього серця шляхом взаємодії з іншими кардіостимуляторами. Однак при деяких патологічних обставин, кардіостимулятори мають свій власний ритм - вони не пов'язані один з одним безпосередньо. Зазвичай можна бачити змінні інтервали часу між часом активації одного кардіостимулятора і іншого. Кардіологи взагалі винаходять езотеричні імена, що описують досить прості динамічні явища і мають схеми класифікації для найменувань ритмів, які не ґрунтуються на нелінійній динаміці. Таким чином, два різних ритму, які можна вважати квазіперіодичними (в першому наближенні) - парасистолія і атріовентрикулярна блокада третього ступеня. Аналіз цих серцевих аритмій призводить до проблем теорії чисел.

## 1.9 Висновки до розділу

Перший розділ спрямований на ознайомлення з нелінійними дискретними динамічними система та теорією хаосу. Основний акцент зроблений на якісних методах – геометричному представленню динаміці траєкторії за допомогою павутинного методу та фазових портретів,

критеріям локальної та глобальної стійкості точок рівноваги, роз'ясненню понять біфуркації, циклів та їх стабільності, хаосу в дискретних моделях.

## РОЗДІЛ 2. СТІЙКИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ РІСТ ЕКОНОМІКИ. МОДЕЛЬ РОСТУ СОЛОУ ТА ЇЇ УЗАГАЛЬНЕННЯ НА ПРИКЛАДІ S-ФУНКЦІЇ ВЕЙБУЛА

### 2.1 Модель росту Солоу [17]

*Основні складові елементи моделі:*

- Виробнича функція:

$$Y_t = F(K_t, L_t, A_t)$$

- Незмінний ефект масштабу:

$$F(\lambda K_t, \lambda L_t) = \lambda F(K_t, L_t)$$

- Часто розглядається окремий випадок: виробнича функція Кобба-Дугласа, за допомогою технології збільшення праці:

$$F(K, L) = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$$

- Іноді функцію формують як:

$$F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$$

- Екзогенний приріст населення:

$$L_t = (1 + n)L_{t-1}$$

- Постійна норма амортизації капіталу:  $\delta$

- Екзогенна норма заощаджень:

$$S_t = sY_t,$$

$$C_t = (1 - s)Y_t$$

- Якщо економіка замкнута, то заощадження дорівнюють інвестиціям:

$$I_t = S_t$$

- Екзогенний технічний прогрес:

$$A_t = (1 + g)A_{t-1}$$

## 2.2 Механіка моделі

Припустимо, що технологічного прогресу немає:

- Скільки капіталу накопичить економіка?
- Чи зросте економіка? На скільки?

Припустимо, що  $g = 0$  на даний момент і  $A = 1$

Функція експрес-виробництва в розрахунку на душу населення:

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = \frac{1}{L_t} F(K_t, L_t) = F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) \equiv f(k_t)$$

де  $k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}$ .

Зауважте, що ми використовуємо взаємозаміну "на душу населення" та "на одного працівника", але  $\frac{\text{робоча сила}}{\text{населення}}$  може змінюватися в часі та в різних країнах

Фонд капіталу розвивається відповідно до:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t = (1 - \delta)K_t + sY_t$$

$$\Delta K_{t+1} = -\delta K_t + sY_t$$

У розрахунку на душу населення:

$$\begin{aligned} \Delta k_{t+1} &\equiv k_{t+1} - k_t = \frac{(1 - \delta)K_t + sY_t}{L_{t+1}} - k_t = \\ &= \left[ \frac{(1 - \delta)K_t + sY_t}{L_t} \right] \frac{L_t}{L_{t+1}} - k_t = [(1 - \delta)k_t + sy_t] \frac{1}{1 + n} - k_t = \\ &= \frac{sy_t - (\delta + n)k_t}{1 + n} = \frac{sf(k_t) - (\delta + n)k_t}{1 + n} \end{aligned}$$

- Інтерпретація
- Графік:  $sf(k_t)$  та  $(\delta + n)k_t$
- Стаціонарний стан та конвергенція
- Немає довгострокового зростання! (ВВП зростає, ВВП на душу населення не зростає)
- Зростання під час переходу

Приклади:

- Збільшення норми заощаджень
- Зростання темпів приросту населення
- Одноразове вдосконалення технології

### 2.3 Стаціонарний стан в функції Кобба-Дугласа

- Для випадку Кобба-Дугласа ми можемо чітко обчислити стаціонарний капітал і вивести його
- Виробнича функція:



$$Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha},$$

$$y_t = \frac{K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t} = k_t^\alpha$$

## 2.4 Узагальнення моделі Солоу зростання економіки на основі s-функції Вейбула

Розглянемо узагальнення моделі Солоу зростання економіки на основі s-функції Вейбула.

Відома така логістична крива

$$T(t) = \alpha - \beta \exp(-\gamma t^\sigma)$$

де  $\sigma$  – в загальному випадку нецілі числа.

Ця модель відома як модель зростання Вейбула [10]:

$$l_t = L_\infty - (L_\infty - \beta)e^{-(kt)^\delta} \quad (2.1)$$

де  $l$  – довжина (або ширина, висота, розмір);

$t$  – час.

Побудуємо модель (2.1) з фіксованими параметрами, для яких графік функції бере свій початок в точці (0,0) і знаходиться в першій чверті, як зображено на Рис. 2.1:

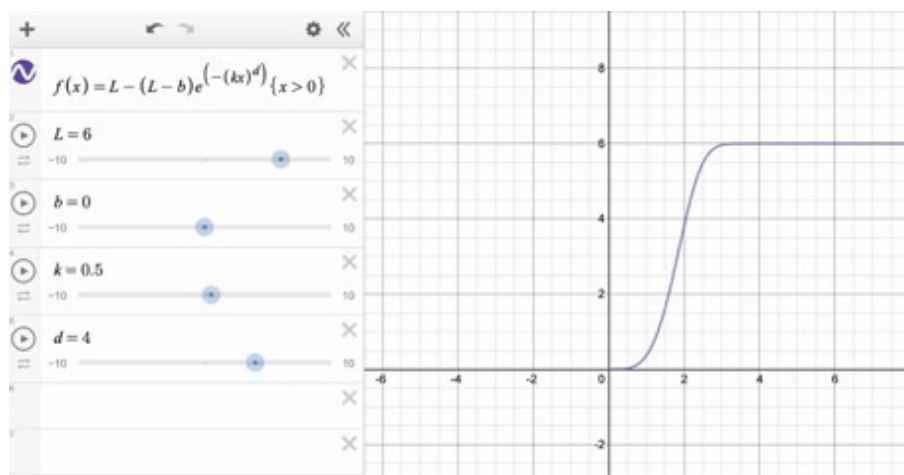


Рисунок 2.1 – Графік  $f(t) = L - (L - b)e^{-(kt)^d}$ , при  $L = 6, b = 0, k = 0.5, d = 4$ .

*Мета:* знайти стійку точку спокою.

Розглянемо рівняння Солоу [15]:

$$k_{t+1} = sf(k_t) + (1 - n - d)k_t$$

де  $k_t$  – капітал на душу населення;

$s$  – частка інвестицій від ВВП;

$n = \frac{L_{t+1} - L_t}{L_t}$  – частка зростання населення;

$d$  – частка амортизації і ремонту устаткування.

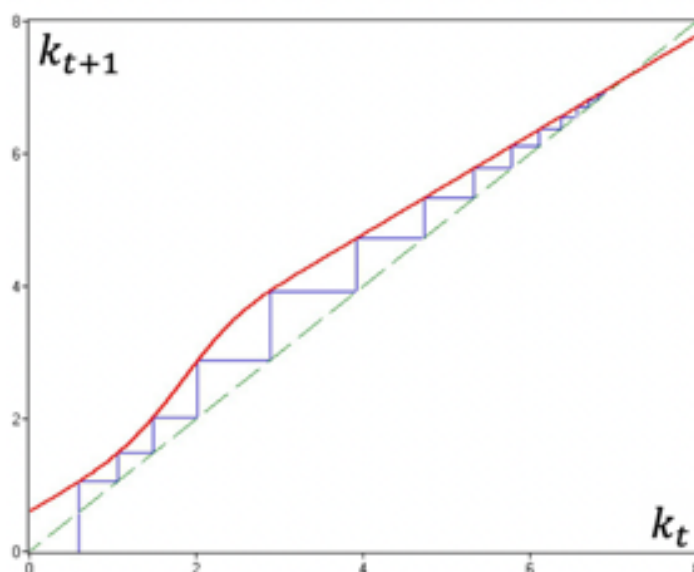
Вводиться параметр  $u$  - стабільний приріст і одночасно початковий капітал.

$$G(t) = sf(k_t) + (1 - n - d)k_t + u \quad (2.2)$$

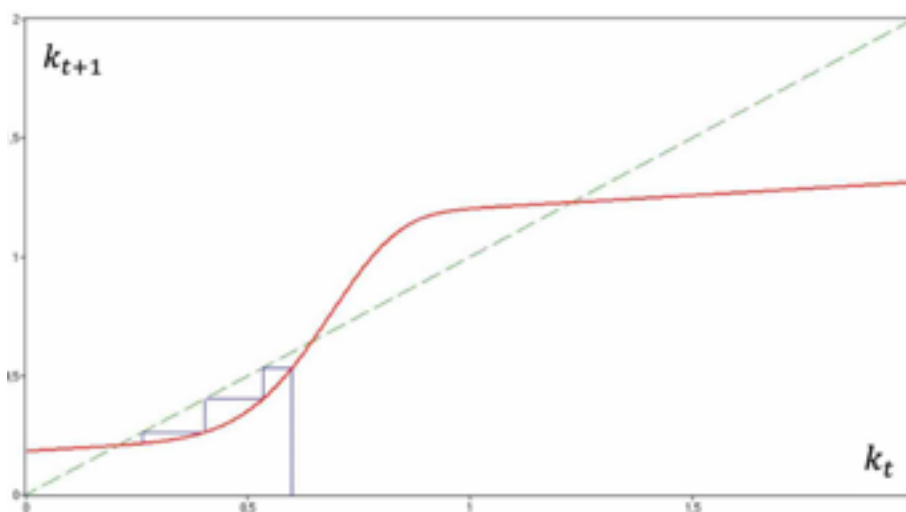
Побудуємо фазову діаграму для рівняння (2.2). Представимо 3 випадки:

*Випадок 1*

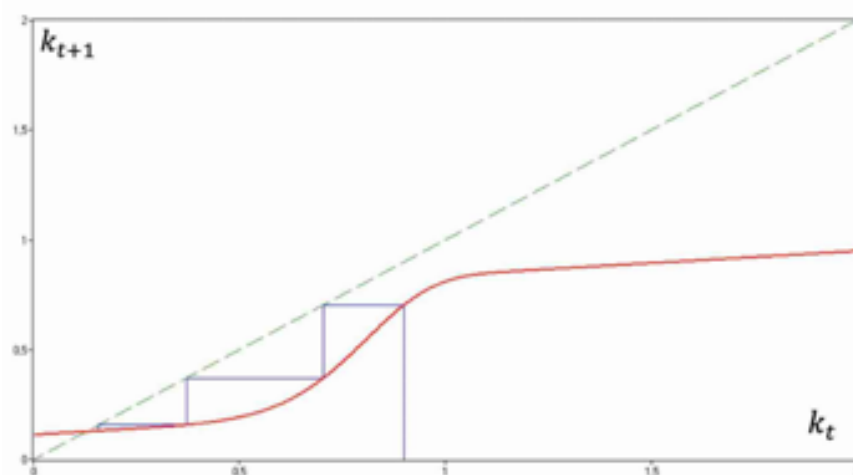
Одна стійка нерухома точка (крива (2.2) після точки  $k_0$  проходить вище бісектриси), як показано на Рис. 2.2:

Рисунок 2.2 – Фазова діаграма *Випадок 1**Випадок 2*

Три нерухомі точки, серед яких дві стійкі і одна нестійка точка (крива (2.2) після точки  $k_0$  перетинає бісектрису в двох точках), як показано на Рис. 2.3:

Рисунок 2.3 – Фазова діаграма *Випадок 2**Випадок 3*

Одна стійка нерухома точка (крива (2.2) після точки  $k_0$  проходить нижче бісектриси), як показано на Рис. 2.4:

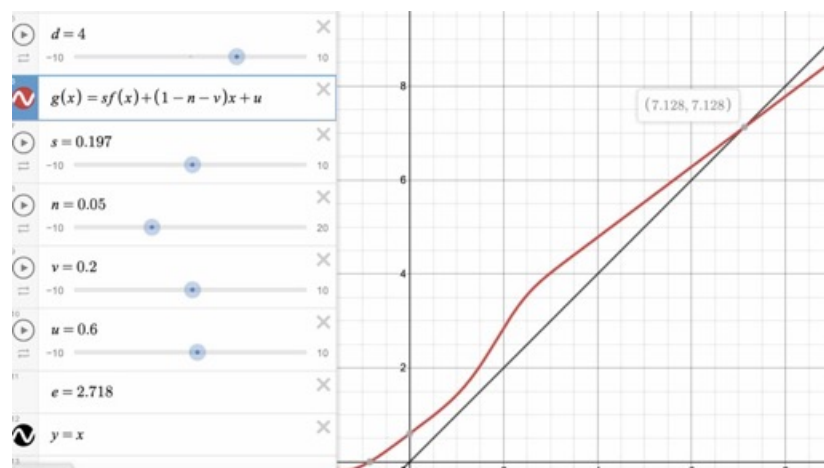
Рисунок 2.4 – Фазова діаграма *Випадок 3*

Будемо досліджувати випадок 1, так як випадки 2 і 3 непридатні для практики. Випадки 2 і 3 непридатні, тому що у випадку 2 точка  $k_2^*$ , яка знаходиться далі точки  $k_0$  є нестійкою, і траєкторія буде спадати до нерухомої точки  $k_1^* < k_0$ . У випадку 3 точка  $k_1^* < k_0$ , тому траєкторія буде спадати до нерухомої точки  $k_1^*$ . В той час у випадку 1 точка  $k_1^* > k_0$ , тобто траєкторія буде зростати. У цьому випадку робота економіки має місце існувати.

Розглянемо графік:

$$G(t) = sf(k_t) + (1 - n - d)k_t + u$$

при параметрах при  $s = 0.197, n = 0.05, v = 0.2, u = 0.6$  (Рис. 2.5):

Рисунок 2.5 – Графік  $G(t) = sf(k_t) + (1 - n - d)k_t + u$

*Постановка задачі:* потрібно побудувати траєкторію  $k_t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots, t_\beta$  для вибраної початкової точки  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2, \dots, k_\beta$  та оцінити інтервал її зміни на інтервалі  $[0, t_\beta]$ .  $\lim_{t \rightarrow \infty} k_t = k_*$ . Необхідно визначити ступінь приближення до нерухомої точки  $k_*$ .

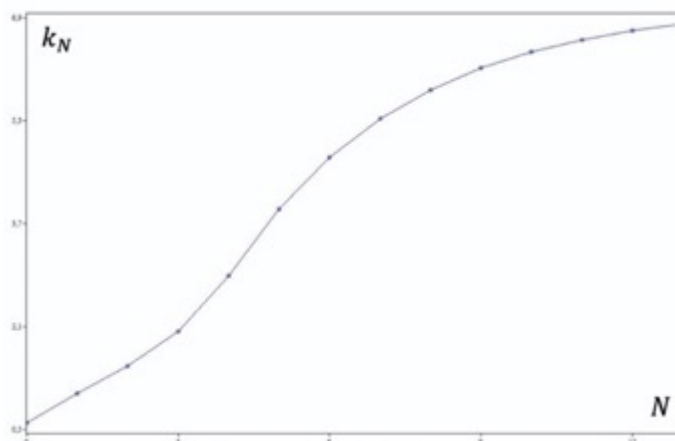
Виберемо момент  $t_\beta$ , для якого  $k_\beta \approx p * k_*$ , при  $p = 0.95$ ,  $k_* = 7.128$

$$k_\beta \approx p * k_* = 7.128 \cdot 0.95 = 6.7716$$

Побудуємо траєкторію по значенням  $k_t$ , які містяться у таблиці 2.1 (Рис. 2.6):

Таблиця 2.1

<b>t</b>	<b><math>k_t</math></b>
1	1,0630823
2	1,492731
3	2,0271719
4	2,8969483
5	3,9343925
6	4,7412935
7	5,3490891
8	5,7996962
9	6,1559902
10	6,4074918
11	6,596118
12	6,7428273
13	6,8476196

Рисунок 2.6 – Часовий ряд  $k_N$ 

Обчислимо приріст змінної  $k_t$  (капітал на душу населення).

$$\Delta(k_{13}) = k_{13} - k_0 = 6.8476196 - 0.6 = 6.2476196$$

Приріст капіталу за період  $t_\beta = 13$  становить:

$$\begin{aligned} \Delta(K_{t_\beta=13}) &= K_{t_\beta=13} - K_0 = (k_{t_\beta=7}(1+n)^{t_\beta=13} - k_0) L_0 = \\ &= (6.8476196 * (1.05)^{13} - 0.6) * L_0 \approx 12.31 * L_0 \end{aligned}$$

Побудуємо графіки  $y_t = f(k_t)$ , (Рис. 2.7) і  $y_t = f(N)$ , (Рис. 2.8) за таблицею 2.2:

Таблиця 2.2

$t$	$k_t$	$f(k_t)$
1	1,0630823	0,44758842
2	1,492731	1,571865
3	2,0271719	3,9115756
4	2,8969483	5,9575563
5	3,9343925	6,0385852
6	4,7412935	6,0385852
7	5,3490891	6,0385852

Кінець таблиці 2.2

8	5,7996962	6,0385852
9	6,1559902	6,0385852
10	6,4074918	6,0385852
11	6,596118	6,0385852
12	6,7428273	6,0385852
13	6,8476196	6,0385852

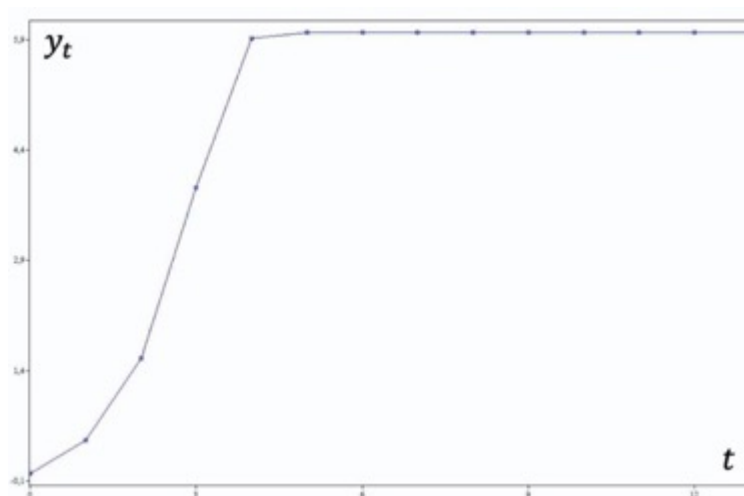


Рисунок 2.7 – Графік  $y_t = f(k_t)$



Рисунок 2.8 – Графік  $y_t = f(N)$

Підрахуємо в скільки разів збільшилися  $k_t, y_t$  за аналізований період:

$$\frac{k_{13}}{k_1} = \frac{6.8476196}{1.0630823} = 6.4412883179,$$

$$\frac{y_{13}}{y_1} = \frac{6.0385852}{0.44758842} = 6.7887931$$

Побудуємо біфуркаційні діаграми для даного рівняння:

*Діаграма 1:*

Як показано на графіку, збільшення значення  $s$  впливає на зміщення вправо по осі  $OX$  стійкої точки (Рис. 2.9)

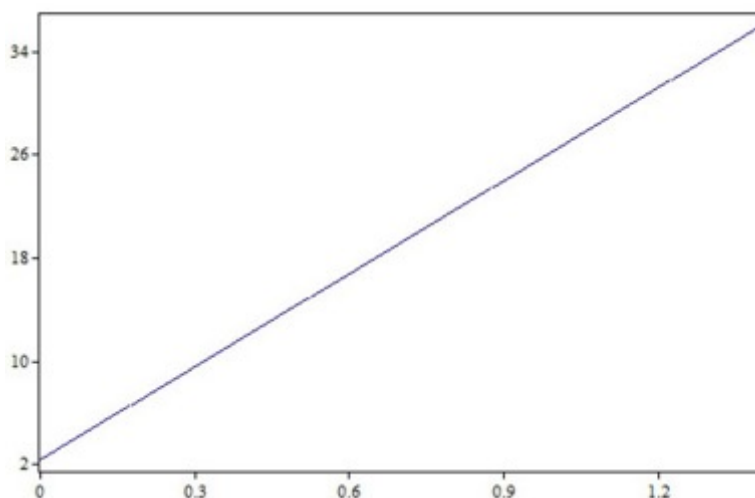


Рисунок 2.9 – Біфуркаційна діаграма для параметра  $s$

*Діаграма 2:*

Можемо спостерігати на графіку, збільшення параметра  $n$  веде до зрушень стійкої точки вліво по осі  $OX$ , (Рис. 2.10).

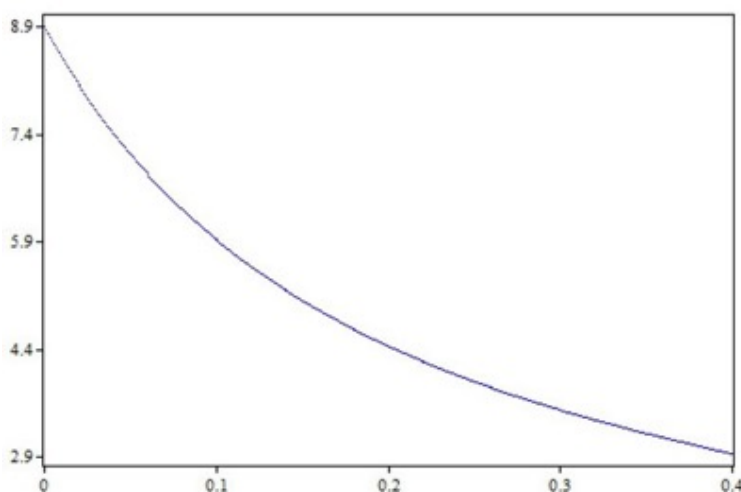


Рисунок 2.10 – Біфуркаційна діаграма для параметра  $n$



*Діаграма 3:*

Графік показує, що при збільшенні параметра  $d$ , стійка точка зсувається вправо по осі  $OX$ , (Рис. 2.11).

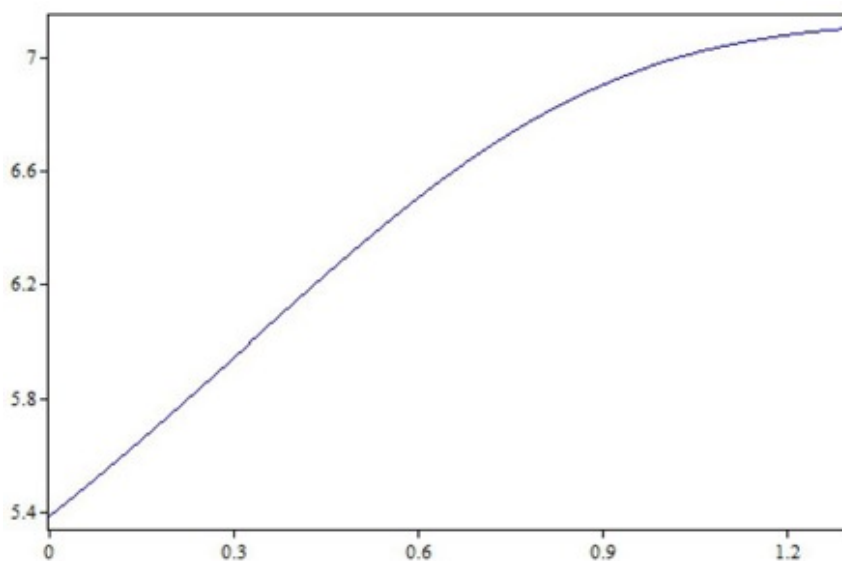


Рисунок 2.11 – Біфуркаційна діаграма для параметра  $d$

*Діаграма 4:*

Збільшення параметра  $l$  призводить до зміщення вправо по осі  $OX$  точки стійкості, (Рис. 2.12).

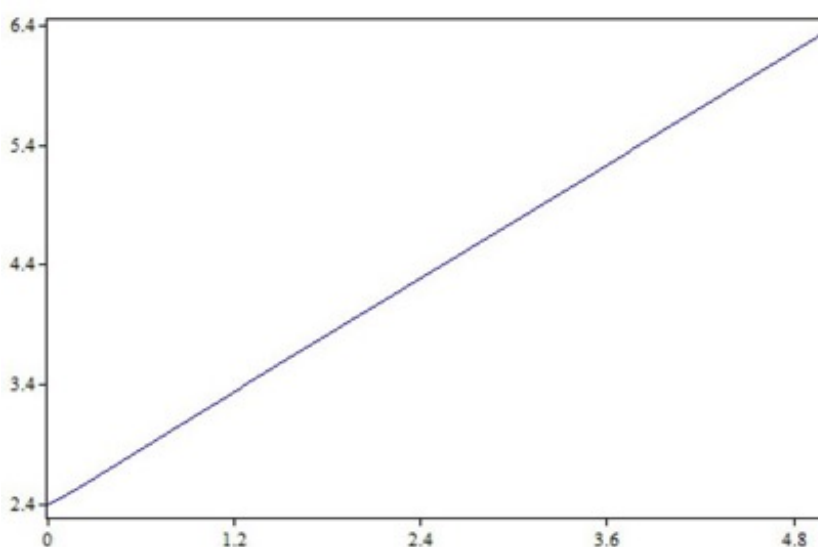


Рисунок 2.12 – Біфуркаційна діаграма для параметра  $l$

*Діаграма 5:*

Параметр  $b$  не впливає на розміщення стійкої точки, (Рис. 2.13).

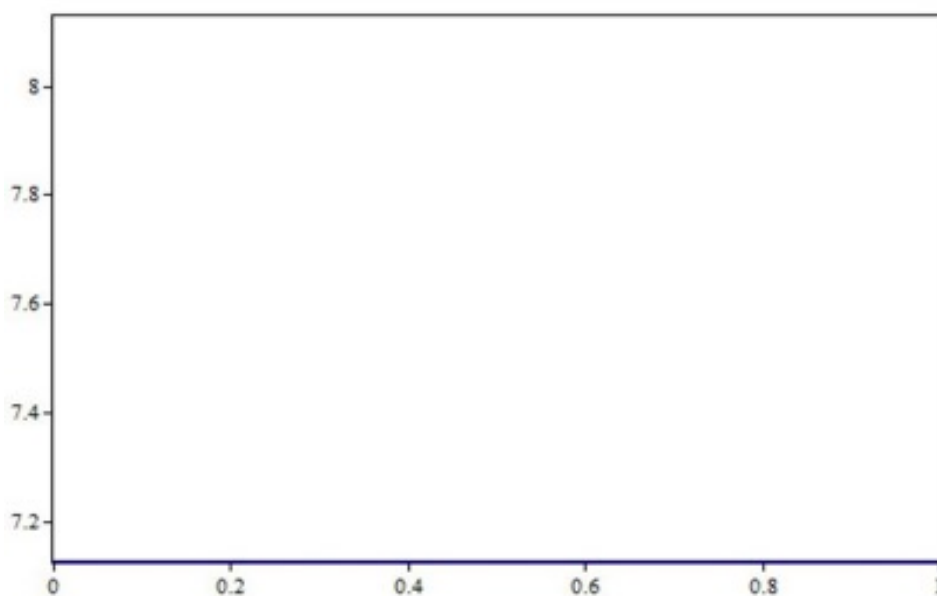


Рисунок 2.13 – Біфуркаційна діаграма для параметра  $b$

*Діаграма 6:*

Збільшення параметра  $k$  незначно впливає на зрушення вправо стійкої точки по осі  $OX$ , (Рис. 2.14).

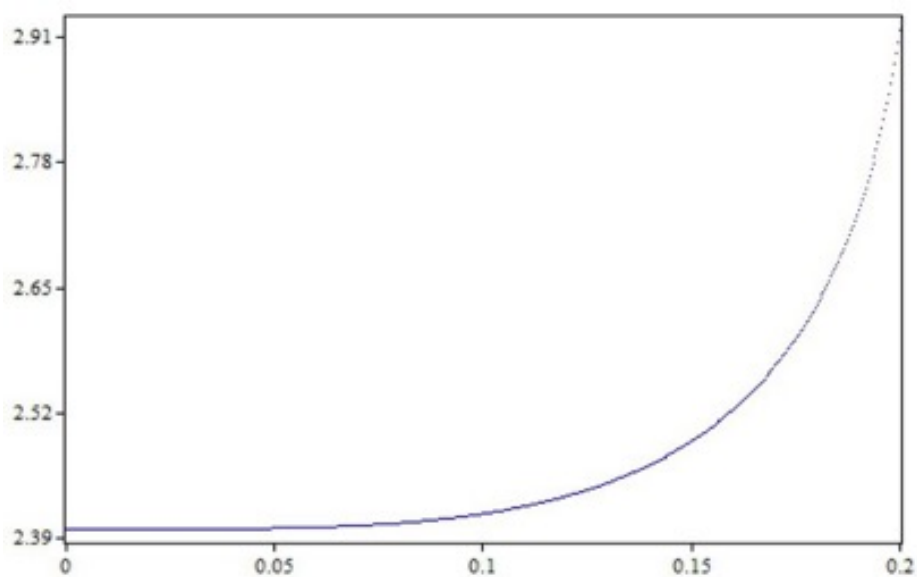


Рисунок 2.14 – Біфуркаційна діаграма для параметра  $k$

*Діаграма 7:*

Збільшення параметра  $u$  впливає на зрушення вправо стійкої точки по осі  $OX$ , (Рис. 2.15).

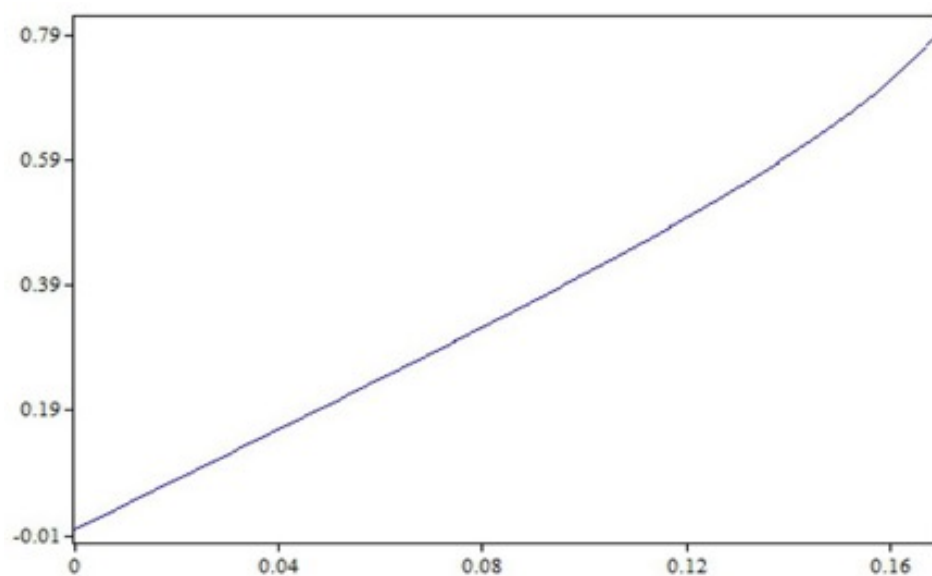


Рисунок 2.15 – Біфуркаційна діаграма для параметра  $u$

*Діаграма 8:*

Збільшення параметра  $v$  веде до зрушень стійкої точки вліво по осі  $OX$ , (Рис. 2.16).

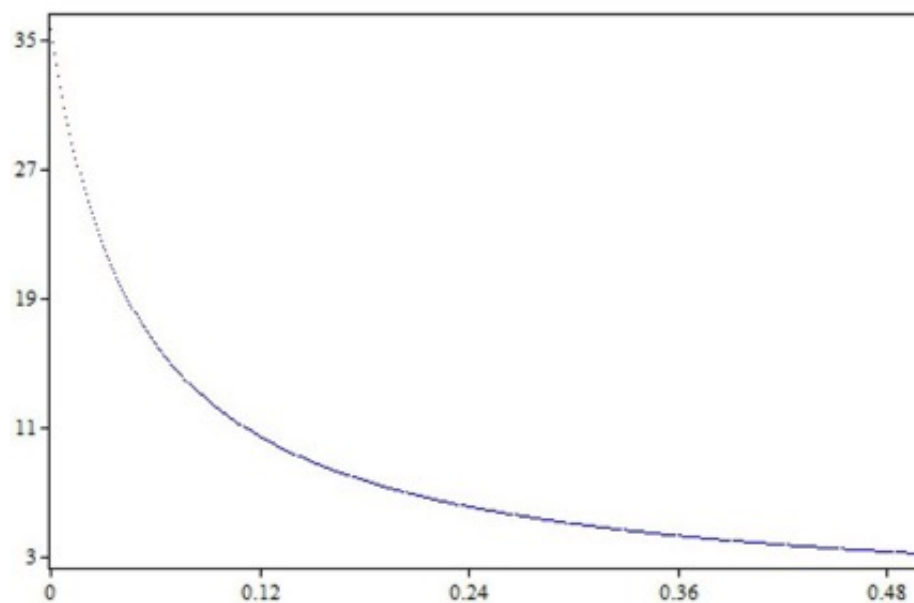


Рисунок 2.16 – Біфуркаційна діаграма для параметра  $v$

Для параметра  $s$  побудована діаграма Ляпунова, Рис. 2.17:

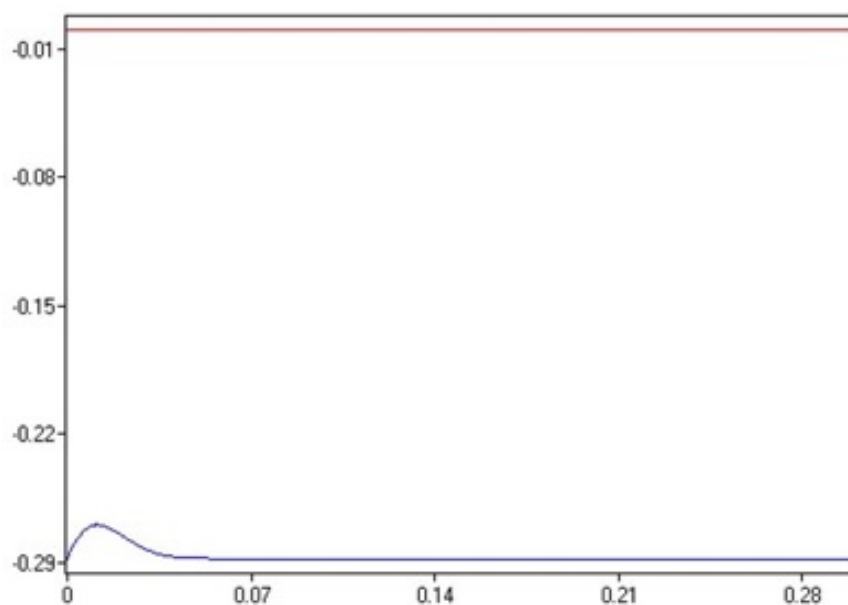


Рисунок 2.17 – Діаграма Ляпунова для параметра  $s$

Для параметра  $d$  побудована діаграма Ляпунова, Рис. 2.18:

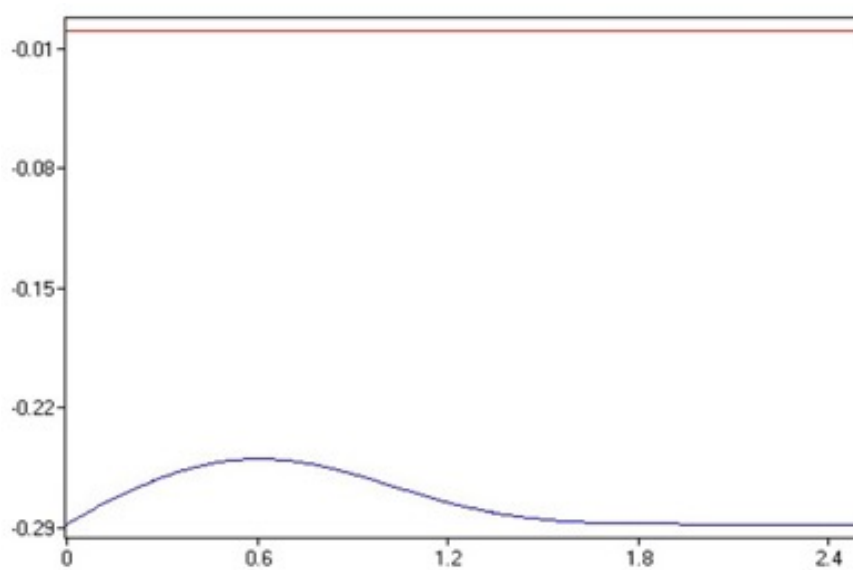


Рисунок 2.18 – Діаграма Ляпунова для параметра  $d$

Для параметра  $l$  побудована діаграма Ляпунова, Рис. 2.19:

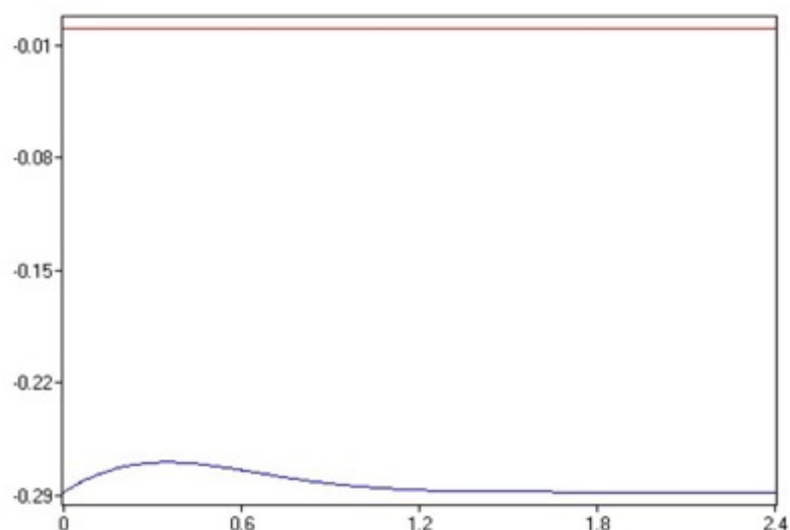


Рисунок 2.19 – Діаграма Ляпунова для параметра  $l$

## 2.5 Висновки до розділу

У другому розділі було розглянуто модель економічного росту Солоу, який складається з теоретичної та практичної частини. Теоретичний підрозділ містить основні відомості про дану модель. У практичній частині представлено приклад моделі Солоу росту економіки на основі  $s$ -функції Вейбула. За мету було взято знайти стійку точку спокою. Для аналізу розглянули три випадки фазових діаграм для рівняння Солоу, які було побудовано за допомогою програми E&F Chaos, проте дійшли висновку, що робота економіки має місце тільки на першій діаграмі. Також проводився аналіз параметрів моделі за допомогою біфуркаційних діаграм та діаграм Ляпунова.

### РОЗДІЛ 3. ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МОДЕЛІ СОЛОУ МЕТОДАМИ СИСТЕМНОЇ ДИНАМІКИ

#### 3.1 Імітаційне моделювання

Для дослідження моделей економічного зростання використовуються як спеціалізовані математичні програми, так і пакети імітаційного моделювання [8]. Розвиток засобів імітаційного моделювання пов'язаний безпосередньо з необхідністю дослідження дуже складних систем. Імітація – це своєрідна спроба дублювати особливості, зовнішній вигляд і характеристики реальної системи. Застосування імітаційного моделювання виправдано, якщо питання, відповідь на які має дати модель, відносяться не до з'ясування фундаментальних законів і причин, що визначають динаміку реальної системи, а до практичного аналізу поведінки системи [9]. У роботі [16] дано таке розгорнуте визначення імітаційного моделювання:

*«Імітаційне моделювання - це найпоширеніший різновид аналогового моделювання, реалізованого за допомогою набору математичних інструментальних засобів, спеціальних імітують комп'ютерних програм і технологій програмування, що дозволяють за допомогою процесів-аналогів провести цілеспрямоване дослідження структури і функцій реального складного процесу в пам'яті комп'ютера в режимі « імітації » і ви - повнити оптимізацію деяких його параметрів ».*

При досить глибоких знаннях поведінки реальної системи і правильному поданні вихідної інформації, імітаційні моделі характеризуються більшою близькістю до реальної системи, ніж аналітичні та чисельні моделі. За допомогою імітаційного моделювання та відповідних сучасних програмних засобів можна створювати навіть ті моделі, які неможливо сформулювати традиційними методами. Крім того, імітаційне моделювання дозволяє створювати моделі тих систем, з якими не можна

провести експеримент, що дозволяє спростити і вдосконалити управління ними.

Однак імітаційне моделювання має і низку недоліків. Основним з них і практично непереборною є те, що імітація - це не наука і не мистецтво, а якась їх комбінація. Крім того, імітаційне моделювання є ітеративною, експериментальною технікою вирішення проблем; вимагає значних витрат кадрів і комп'ютерного часу; найчастіше знаходить рішення, тільки близьке до оптимального. Часто буває важко оцінити адекватність моделі і знайти джерело помилок. Однак іноді цей метод є єдиним способом побудови моделі складної системи.

Вперше методи імітаційного моделювання для аналізу економічних процесів застосував Т. Нейлор. Протягом 1970 - 1980-х рр. спроби використовувати цей вид моделювання в реальному управлінні економічними процесами носили епізодичний характер через складність формалізації економічних процесів і недостатню розвиненість програмних засобів. Однак саме в середині 1970-х рр. з'явилися перші інструментальні засоби імітаційного моделювання, наприклад система GPSS, яка дозволяла створювати моделі контрольованих процесів і об'єктів в основному технічного або технологічного призначення [5].

У 1980-х рр. системи імітаційного моделювання стали розвиватися більш активно. У той час в різних країнах світу застосовувалося більше 20 різних систем (GASP-IV, SIMYLA-67, SLAM-II, GPSS-V і т.д.). До речі, 1990-х гг. з'явилась велика кількість пакетів для імітаційного моделювання, які ставали все більш розвиненими і зручними навіть для не підготовленого користувача. Такий розквіт можна пояснити не тільки збільшенням інтересу до імітаційного моделювання, а й великим прогресом у розвитку комп'ютерної техніки, швидкодією і можливостями, які зростають з кожним днем. Серед таких засобів можна виділити Ithink, Powersim, Process Chapter, Simula і т.д.

### 3.2 Дослідження моделі Солоу за допомогою пакета Ithink

Як приклад пакета імітаційного моделювання, зручного навіть для не підготовленого користувача, можна привести пакет Ithink. Цей пакет має найбільш широкий набір характеристик і підходить для створення як безперервних, так і дискретних моделей [2, 7]. Продемонструємо на його прикладі технологію застосування пакетів імітаційного моделювання для дослідження математичних моделей теорії економічного зростання. Як приклад моделі економічного зростання використовуємо модель Солоу.

Структурна схема моделі Солоу, побудована з вбудованих блоків пакета імітаційного моделювання, представлена на Рис. 3.1.

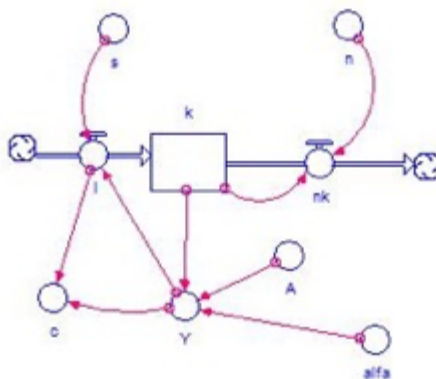


Рисунок 3.1 – Структурна схема моделі Солоу

Тут використані наступні вбудовані блоки:

- резервуар  $k$  являє собою фондоозброєність;
- потоки  $I$  і  $nk$  відображають значення інвестицій та амортизації в кожен момент часу  $t$ ;
- конвертори  $C$  і  $Y$  представляють споживання та інвестиції, а  $s$ ,  $m$ ,  $A$  і  $alfa$  – константи.
- блоки з'єднані рожевими стрілками - конекторами, що показують інформаційні зв'язки в моделі.

Наступним кроком у створенні моделі є задання формул і значень параметрів, яке здійснюється за допомогою стандартних діалогових



вікон пакета Ithink. Наприклад, діалогове вікно для визначення конвертора  $Y$  представлено на Рис. 3.2.

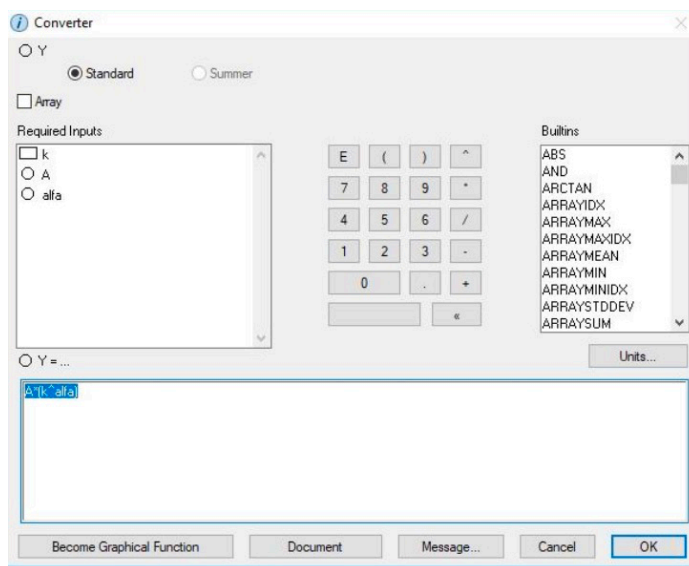


Рисунок 3.2 – Діалогове вікно для визначення конвертора  $Y$

Задамо наступні значення констант:  $s = 0.8, n = 0.05, A = 0.9, alfa = 0.5$ .

В результаті у вікні програмного коду буде автоматично згенерований програмний код, Рис. 3.3:

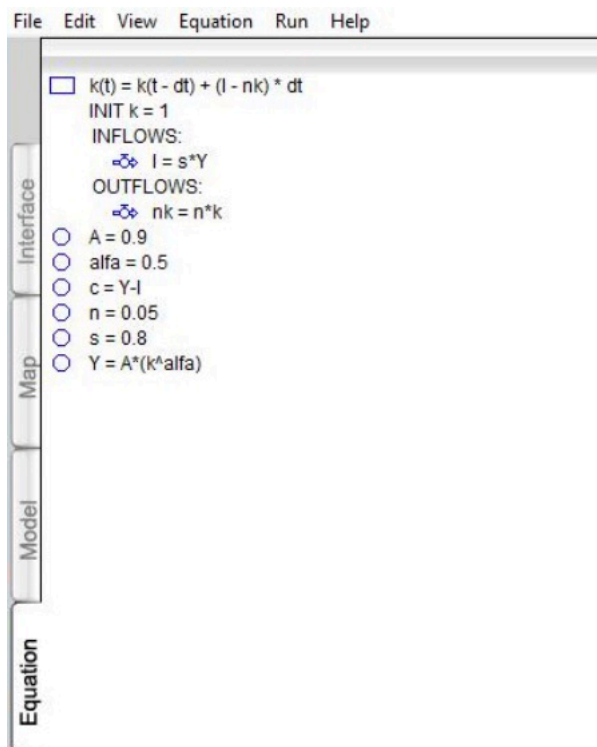


Рисунок 3.3 – Програмний код

Після того як всі функції і значення задані, розмістимо на робочому вікні об'єкт-графік, щоб можна було побачити результати імітації. Діалогове вікно для визначення графіка представлено на Рис. 3.4.

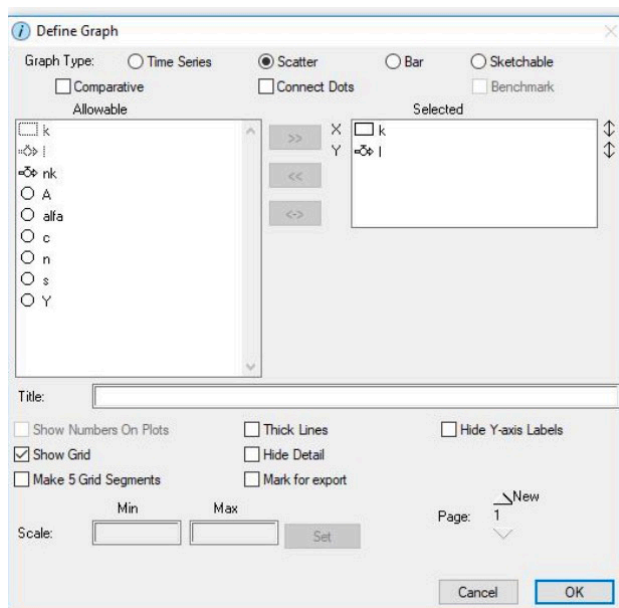


Рисунок 3.4 – Діалогове вікно для визначення графіка

Запустимо модель за допомогою пункту меню «Run» на панелі інструментів. В результаті роботи залежність  $I = sf(k)$  від  $k$  представлена на Рис. 3.5.

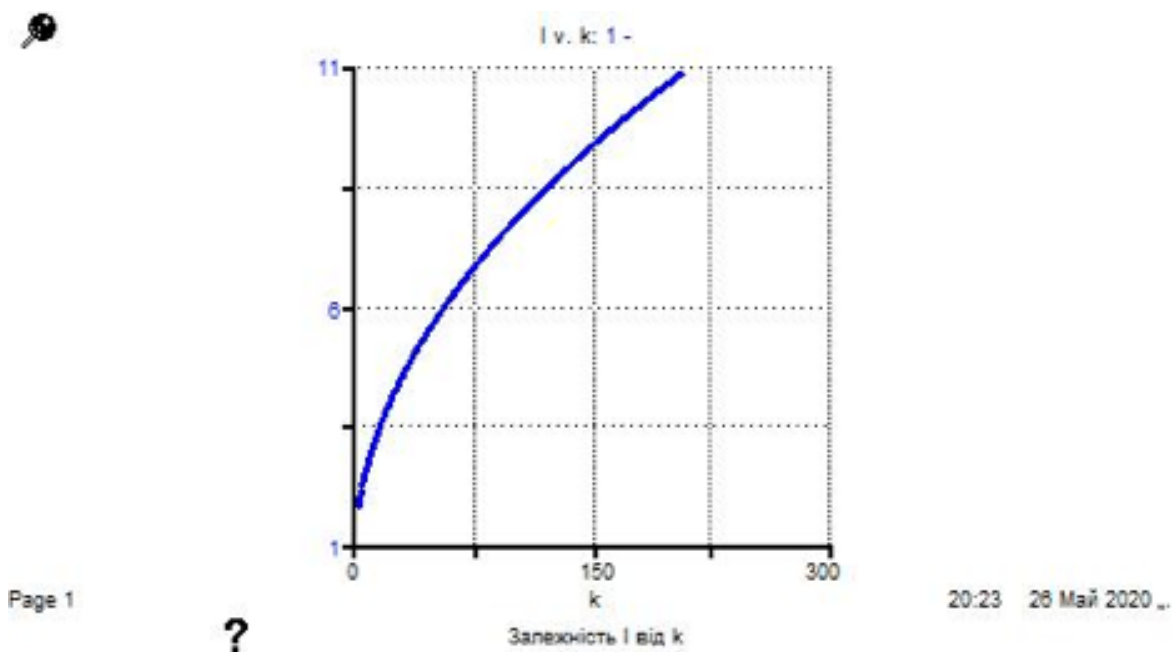


Рисунок 3.5 – Залежність  $I = sf(k)$

Аналогічним чином можна продемонструвати залежність фондоозброєності від часу (Рис. 3.6).

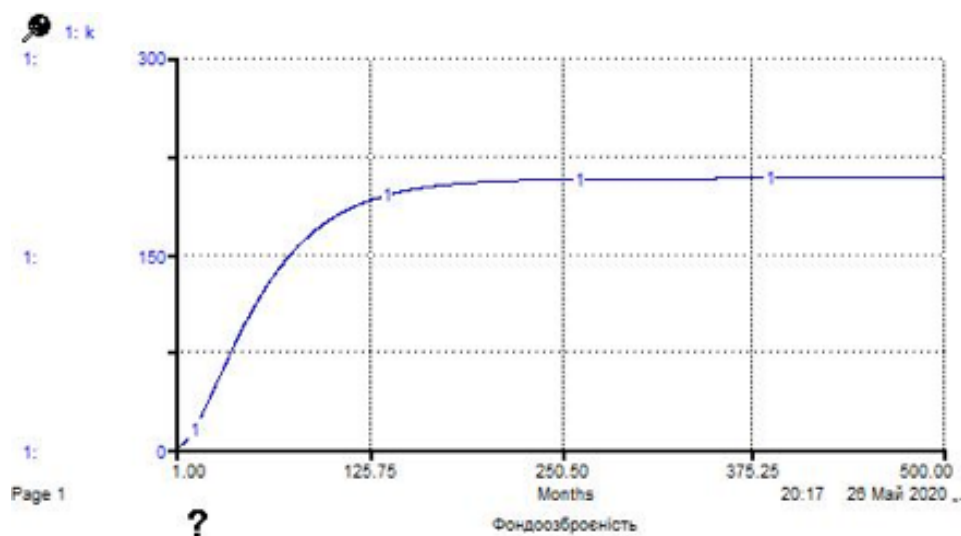


Рисунок 3.6 – Залежність фондоозброєності від часу

Істотним недоліком пакета Ithink є те, що при його використанні не можна побудувати на одному графіку одночасно залежності  $I$  від  $k$  і  $mk$  від  $k$ , так як кілька кривих на одному графіку можна побудувати тільки для тимчасових залежностей. Але необхідно пам'ятати, що пакет Ithink не є спеціальним засобом для вирішення диференціальних рівнянь, і тому він не пристосований для побудови фазових просторів. Однак незаперечною перевагою пакета є легкість зміни значень параметрів і простота перестроювання моделі, при цьому всі залежні величини перераховуються автоматично.

Використовуючи пакет Ithink, можна провести аналіз чутливості [14], тобто вивчити, як впливає зміна значення параметра  $s$  на фондоозброєність  $k$ . Для цього необхідно використати такий інструмент як Senci Specs.

У вікні (Рис. 3.7.) задаємо параметри аналізу чутливості

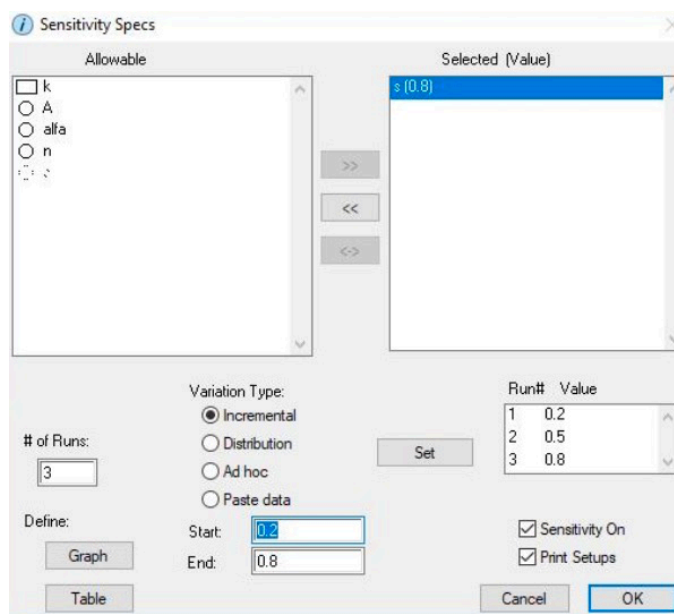


Рисунок 3.7 – Діалогове вікно для визначення параметрів чутливості

Таким чином, чим більше значення параметра  $s$ , тим більше значення  $k^*$ . Аналогічним чином проводиться аналіз чутливості по початкового значення  $k$ , Рис. 3.8:

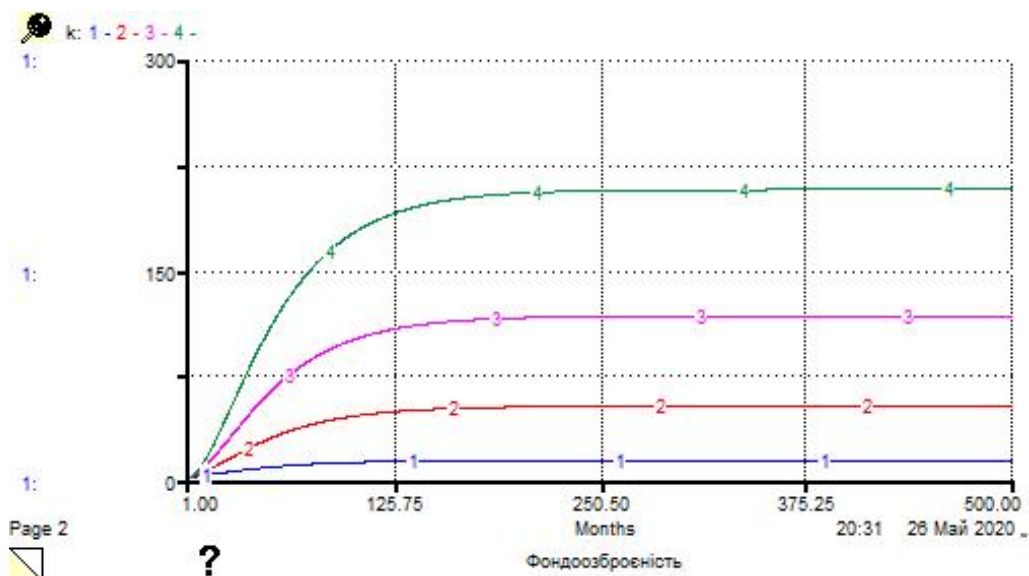


Рисунок 3.8 – Залежність рівня фондоозброєння від норми накопичення

На Рис 3.9. показана залежність фондоозброєння від початкових умов для випадку  $k = 100, 200, 300, 400, 500$ .

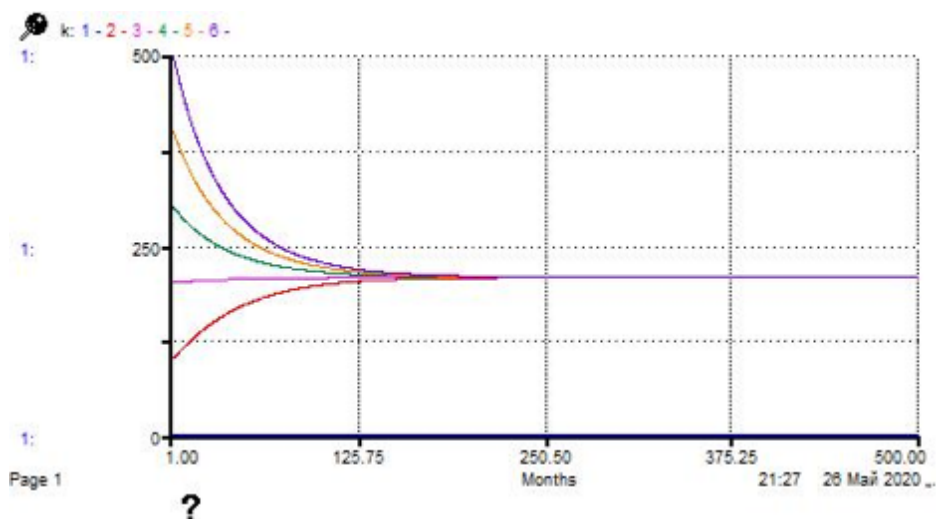


Рисунок 3.9 – Аналіз чуттєвості

3.3 Імітаційне моделювання узагальненої моделі Солоу росту економіки на основі s-функції Вейбула

Використаємо вже відому модель зростання Вейбула:

$$f(k_t) = A - (A - B)e^{-(\alpha(k_t - p))^M}$$

Розглянемо рівняння Солоу:

$$k_{t+1} = sf(k_t) + k_t - (n + d)k_t + u$$

де  $k_t$  – капітал на душу населення;

$u$  – стабільний приріст і одночасно початковий капітал;

$s$  – частка інвестицій від ВВП;

$n$  – частка зростання населення;

$d$  – частка амортизації і ремонту устаткування.

За допомогою пакета *ithink* продемонструємо імітаційне моделювання для дослідження моделі Солоу на основі s-функції Вейбула.

Для початку побудуємо структурна схему даної моделі, яка складається з вбудованих блоків, що містяться в пакеті імітаційного моделювання. Структурна схема (Рис. 3.11) побудована за отриманим загальним рівнянням:

$$k_{t+1} = s(A - (A - B)e^{-(\alpha(k_t - p))^M}) + u + k_t - (n + d)k_t$$

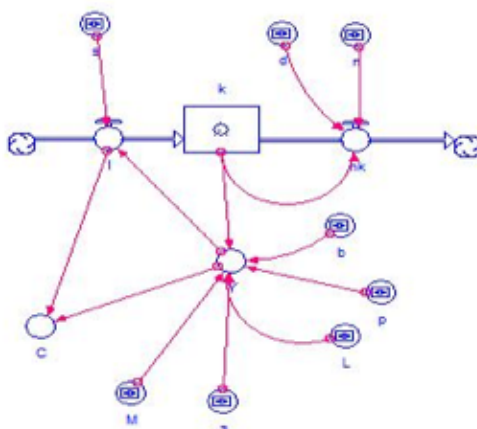


Рисунок 3.11 – Структурна схема узагальненої моделі Солоу на основі s-функції Вейбула

У схемі використані наступні вбудовані блоки:

- резервуар  $k$  являє собою капітал на душу населення;
- потоки  $I$  і  $pk$  відображають значення інвестицій та амортизації в кожен момент часу  $t$ ;
- конвертори  $S$  і  $Y$  представляють споживання та інвестиції,
- $M, a, L, p, b, s, d, n, u$  – параметри (const).
- блоки з'єднані рожевими стрілками - конекторами, що показують інформаційні зв'язки в моделі.

Після задання всіх формул та значень параметрів отримуємо згенерований код програми (Рис. 3.12.)



Рисунок 3.12 – Згенерований код програми

В залежності від значень параметрів у моделі Солоу отримаємо 3 випадки поведінки росту економіки.

Випадок 1, (Рис. 3.13):

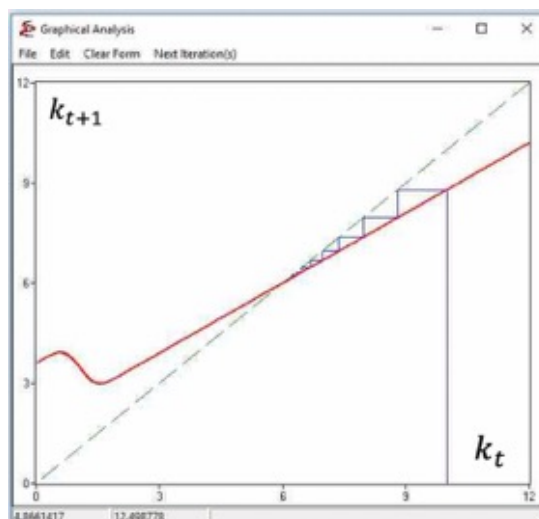


Рисунок 3.13 – Фазова діаграма Випадок 1

Отримали часовий ряд для відповідної фазової діаграми, (Рис. 3.14):

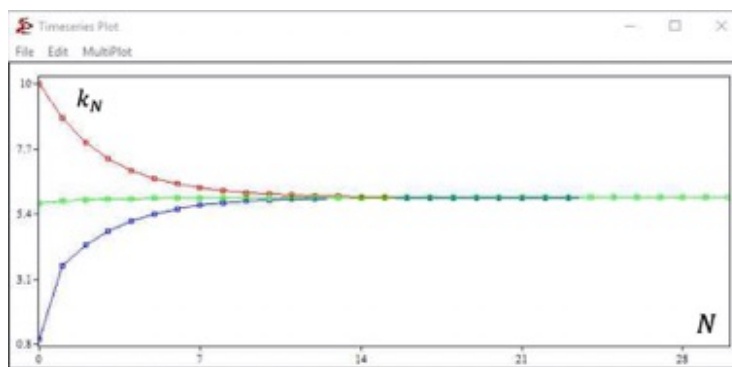


Рисунок 3.14 – Часовий ряд для Випадку 1

За допомогою пакету Ithink змодельюємо часовий ряд в залежності від значень параметрів, які ми отримали завдяки побудові фазової діаграми та часового ряду на E&F Chaos.

Використовуючи функцію «Slider Input Device» встановлюємо повзунки, якими будемо корегувати значення параметрів для кожного випадку. Виберемо декілька початкових значень, щоб побачити, яку поведінку буде мати економіка країни в залежності від початкового капіталу.

*Випадок 1:*  $A = 6, B = 0, \text{alfa} = 0.5, p = 0, s = 0.3, u = 0, M = 4,$   
(Рис. 3.15):

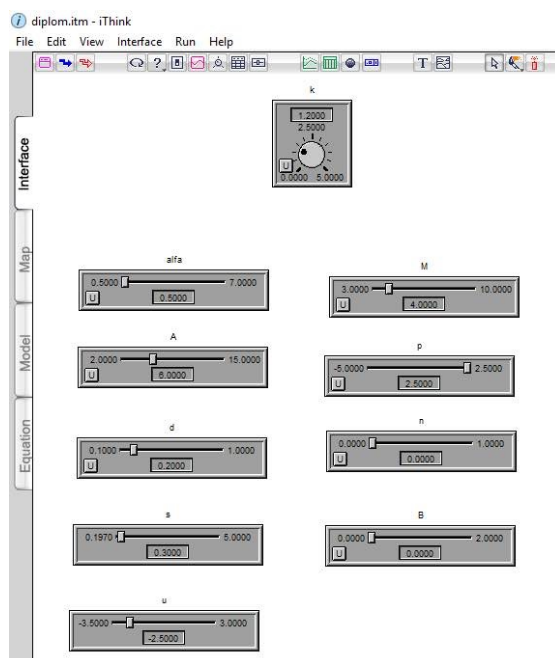


Рисунок 3.15 – Значення параметрів для *Випадку 1*

Отримали наступний результат роботи програми при даних значеннях, (Рис. 3.16)::



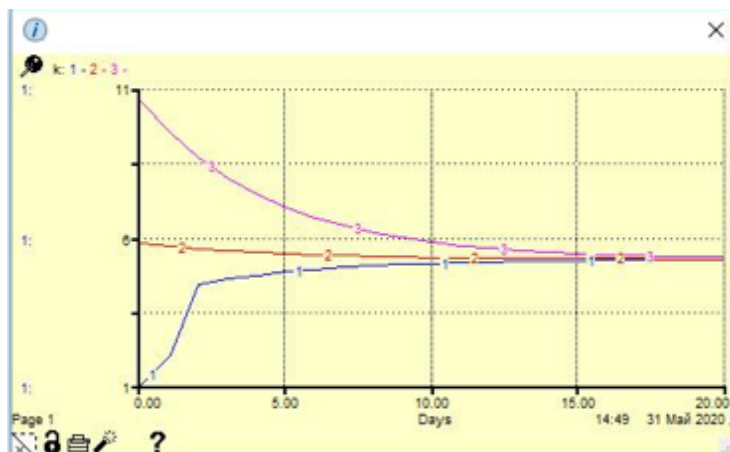


Рис. 3.16. Залежність  $k_t$  від  $t$  (Випадок 1)

Було обрано 3 початкові умови:  $k_{01} = 0.6$ ;  $k_{02} = 5.6$ ;  $k_{03} = 10.6$

та після моделювання даної моделі з певними параметрами маємо одну нерухому стійку точку, це говорить про те, що незалежно від початкових значень економіка країни буде залишатися стабільною, це властиво для високорозвинених держав.

За допомогою імітаційного моделювання Ithink визначимо, які параметри впливають на ріст економіки.

При зростанні значення параметра  $s$  (з 0.3 до 0.5) значення стійкої точки зміщується вгору по осі ОУ, тобто такі зміни параметра  $s$  позитивно впливає на економіку країни, як показано на Рис. 3.17:

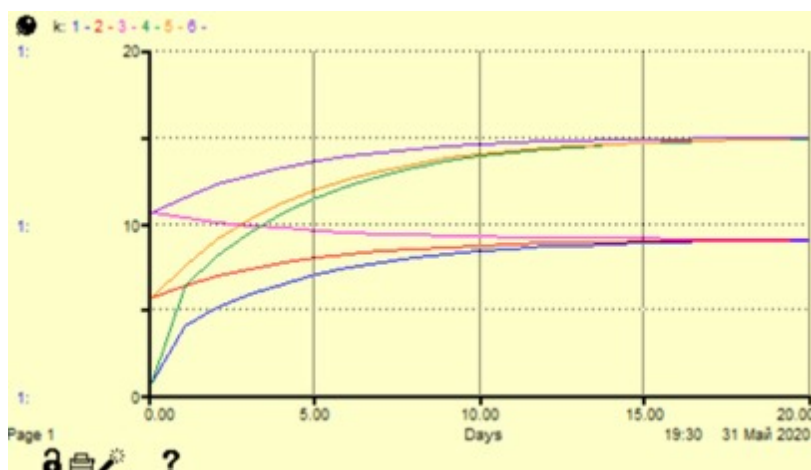


Рисунок 3.17 – Залежність  $k_t$  від  $t$  при зміні параметра  $s$

При зростанні параметра  $A$  (з 6 до 10) значення стійкої точки зміщується вгору по осі  $OY$ , як показано на Рис. 3.18, тобто економіка країни становиться більш міцною.

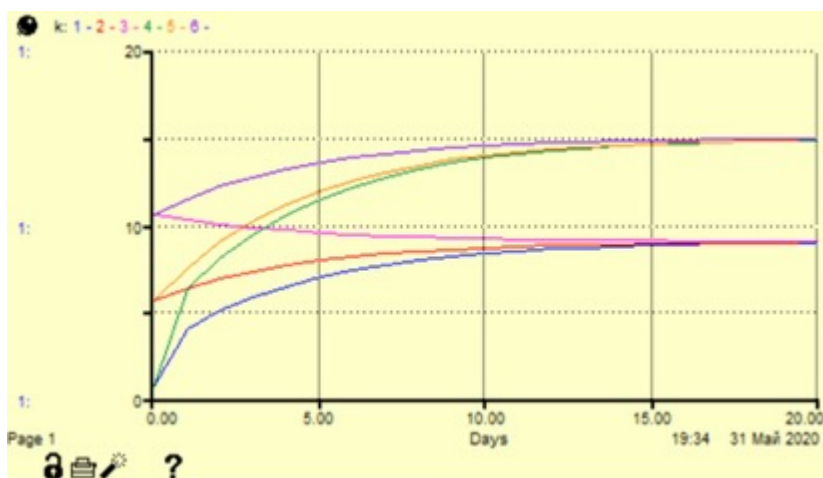


Рисунок 3.18 – Залежність  $k_t$  від  $t$  при зміні параметра  $A$

При зростанні параметра  $d$  (з 0.2 до 0.8) значення стійкої точки зміщується вниз по осі  $OY$ , як показано на Рис. 3.19, тобто такі зміни негативно впливають на економіку країни.

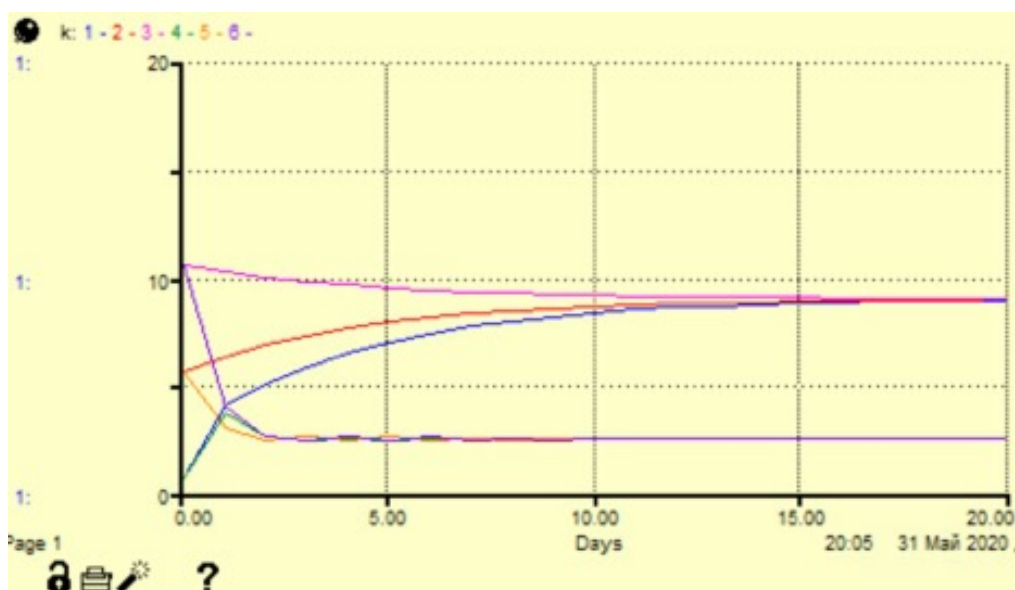


Рисунок 3.19 – Залежність  $k_t$  від  $t$  при зміні параметра  $d$

При зростанні параметра  $n$  (з 0 до 0.5) значення стійкої точки зміщується вниз по осі  $OY$ , як показано на Рис. 3.20, тобто такі зміни негативно впливають на економіку країни.

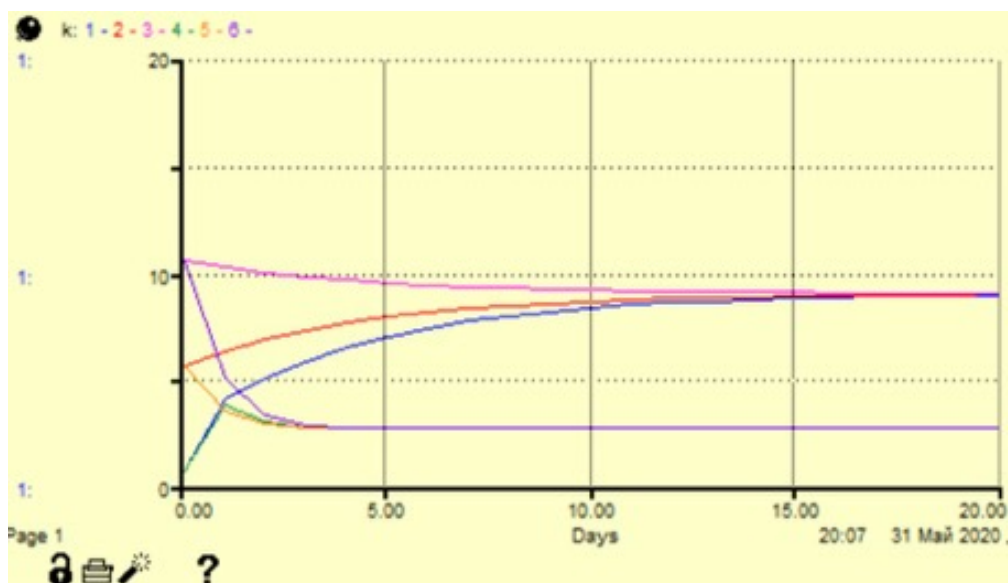


Рисунок 3.20 – Залежність  $k_t$  від  $t$  при зміні параметра  $n$

При зростанні параметра  $u$  (з 0 до 2) значення стійкої точки зміщується вниз по осі  $OY$ , проте не на значний показник, (Рис. 3.21):

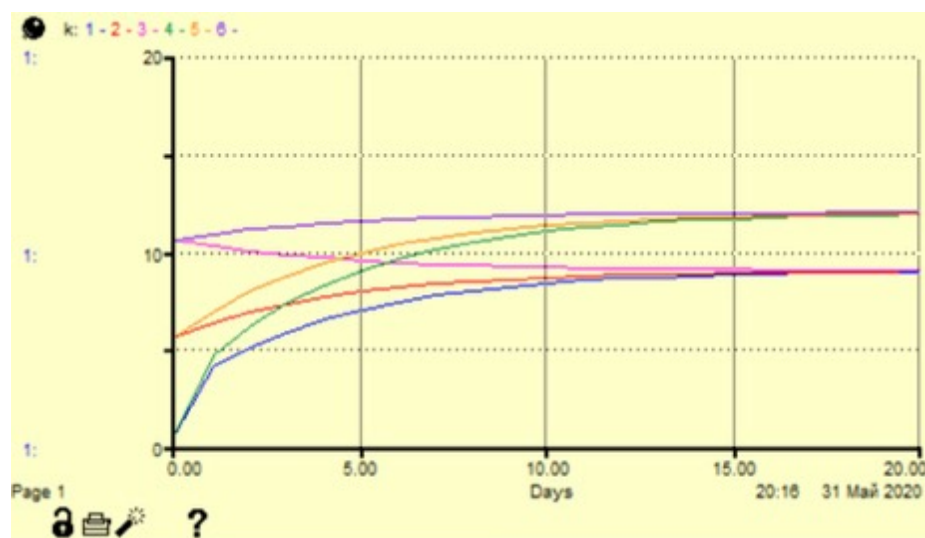
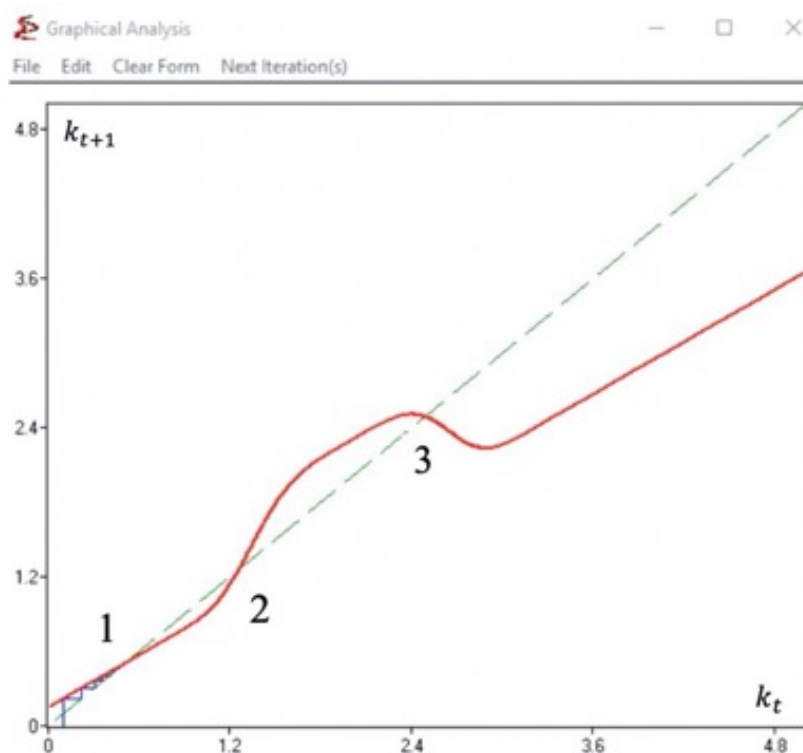


Рисунок 3.21 – Залежність  $k_t$  від  $t$  при зміні параметра  $u$

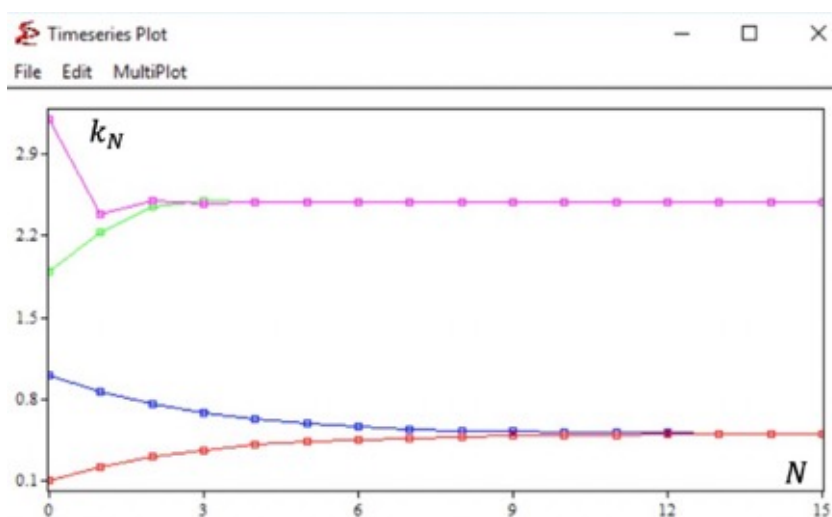
Параметри  $\alpha, p, M, B$  не впливають на ріст економіки.

Випадок 2, (Рис. 3.22):

Рисунок 3.22 – Фазова діаграма *Випадок 2*

Отримали три нерухомі точки, побудуємо числовий ряд, щоб проаналізувати, чи являються ці точки стійкими.

Отримали часовий ряд для відповідної фазової діаграми, (Рис. 3.23):

Рисунок 3.23 – Числовий ряд *Випадок 2*

Як бачимо: маємо дві нерухомі стійкі точки – точка 1 і точка 3, тобто точка 2 є «пасткою».

Побудуємо числовий ряд за допомогою пакету Ithink в залежності від значень параметрів.

Випадок 2:  $\alpha = 4, M = 4, A = 3, p = 2, d = 0.2, n = 0, s = 0.3, B = 0.5, u = -2.5$ , (Рис. 3.24):

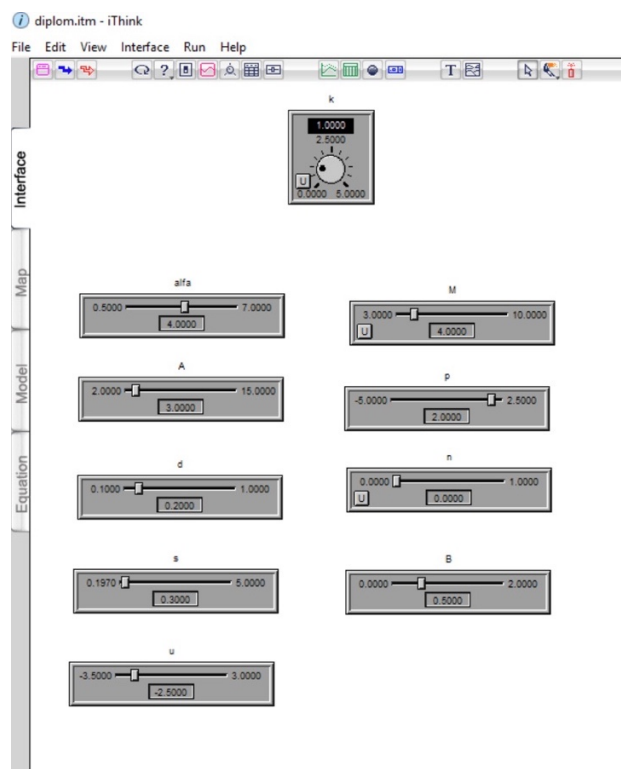


Рисунок 3.24 – Значення параметрів для Випадку 2

Так як маємо дві стійкі точки, побудуємо числовий ряд для кожної точки при різних початкових умовах.

Для точки 1 було обрано такі початкові умови:  $k_{11} = 0.1, k_{12} = 0.4, k_{13} = 0.7, k_{14} = 1$

Для другої стійкої точки (3) маємо наступні початкові умови, (Рис. 3.25):  $k_{31} = 2.4, k_{32} = 2.8, k_{33} = 3.2, k_{34} = 3.6$

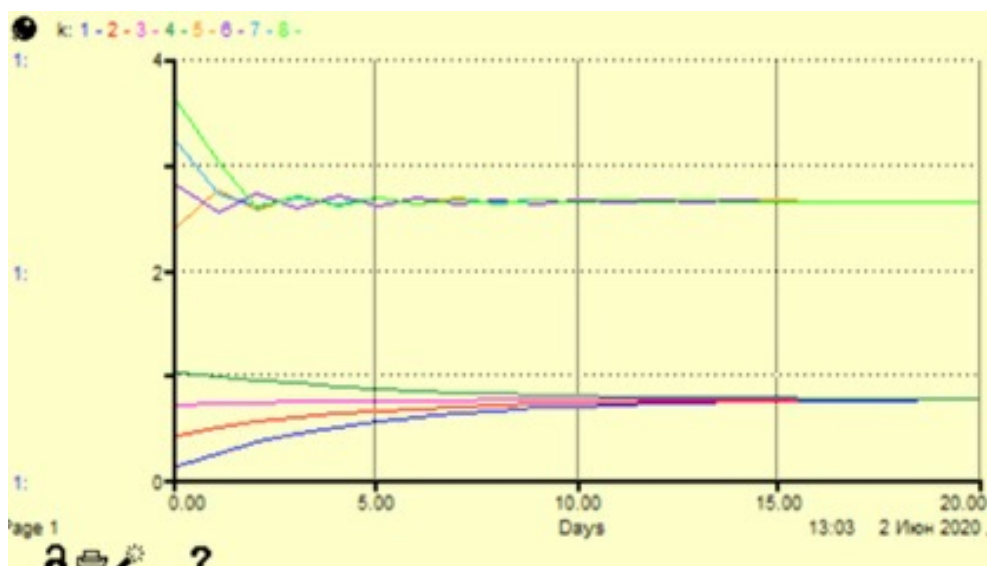


Рисунок 3.25 – Залежність  $k_t$  від  $t$  (Випадок 2)

Отже, переконавшись, що модель с даними параметрами буде мати дві стійкі точки, що демонструє періодичну економіку, яка властива для країн з середнім рівнем розвитку.

Розглянемо вплив зміни значень параметрів на стійкі точки.

Виберемо для аналізу точку 1.

При збільшенні параметра  $A$  (з 3 до 5) стійка точка зміщується вгору по осі  $OY$ , тобто такі зміни впливають позитивно на економіку, як показано на Рис. 3.26.

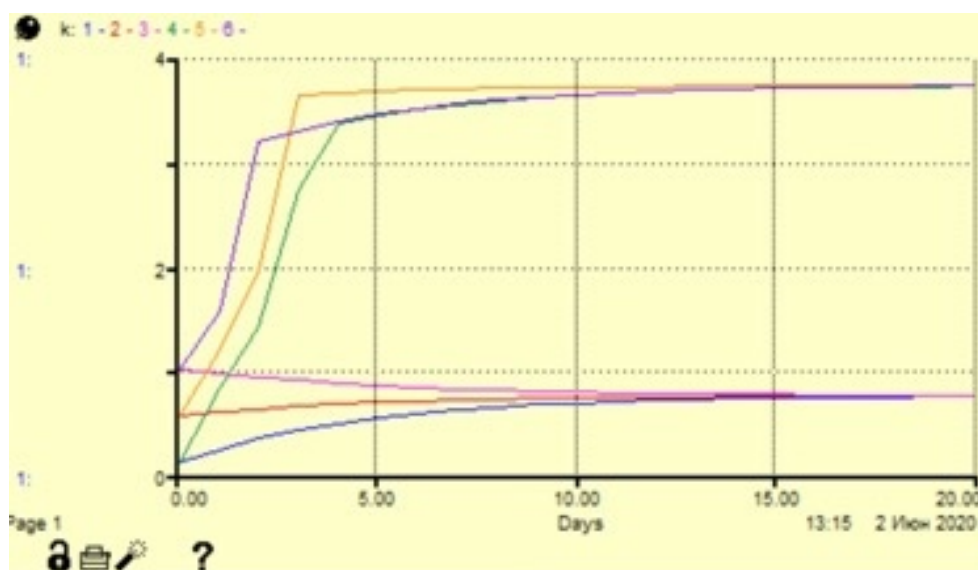


Рисунок 3.26 – Залежність  $k_t$  від  $t$  при зміні параметра  $A$

При зменшенні параметра  $p$  (з 2 до 0.9) отримали, що стійка точка зменшилась, тобто такі зміни в параметрі  $p$  мають позитивний вплив на економіку, як показано на Рис. 3.27.

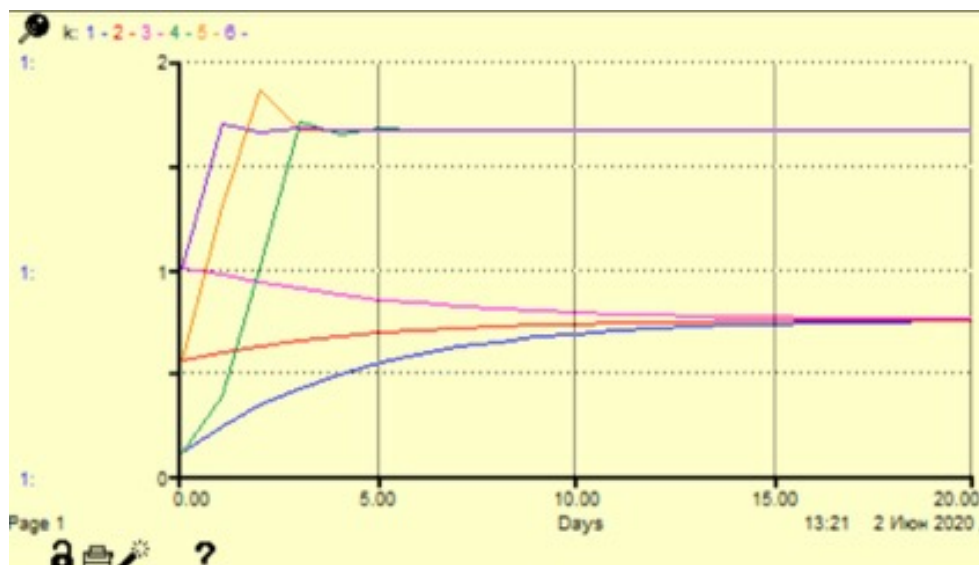


Рисунок 3.27 – Залежність  $k_t$  від  $t$  при зміні параметра  $p$

При збільшенні параметра  $d$  (з 0.2 до 0.6) можемо спостерігати зміщення стійкої точки вгору по осі ОУ, тобто збільшення параметра позитивно впливає на економіку країни, як показано на Рис. 3.28.

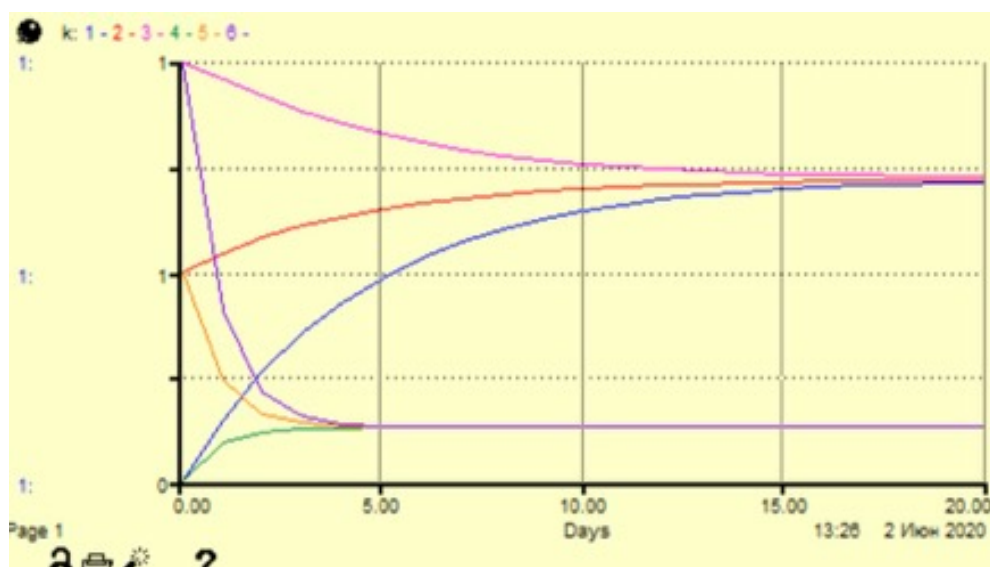


Рисунок 3.28 – Залежність  $k_t$  від  $t$  при зміні параметра  $p$

При збільшенні значення параметра  $n$  (з 0 до 0.5) отримали, що стійка точка стала меншою, а отже і економіка стала гіршою, як показано на Рис. 3.29.



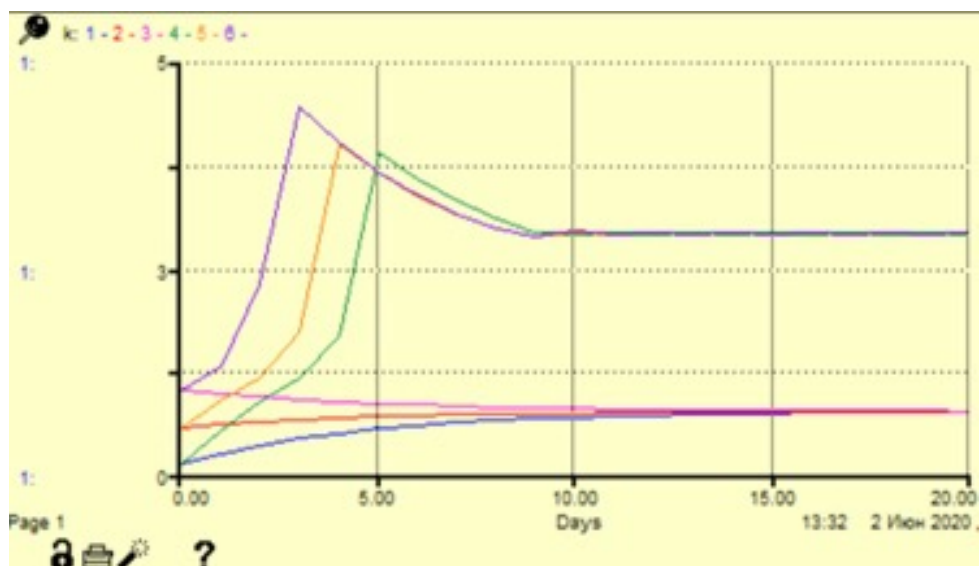


Рисунок 3.29 – Залежність  $k_t$  від  $t$  при зміні параметра  $s$

При збільшенні значення параметра  $s$  (з 0.3 до 0.9) стійка точка піднімається вгору, що позитивно відображається на економіці, як показано на Рис. 3.30.

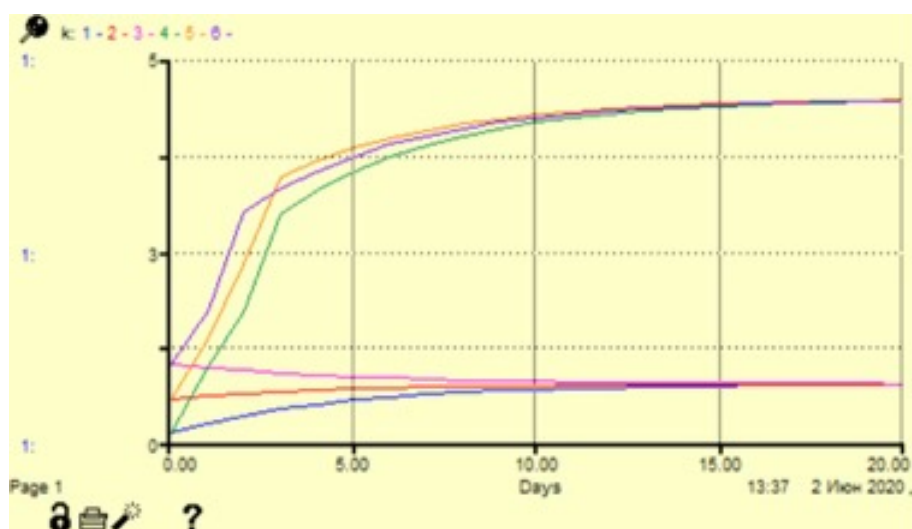


Рис. 3.30 – Залежність  $k_t$  від  $t$  при зміні параметра  $u$

При збільшенні параметра  $u$  (-2.5 до 0) отримали, що стійка точка по осі ОУ піднялась вгору, а отже збільшення параметра  $u$  позитивно впливає на економіку країни.

У даній моделі при будь-яких змінах параметрів  $\alpha, M, B$  не спостерігається жодного переміщення стійкої точки. Аналогічний результат отримаємо при аналізі стійкої точки 3.



Випадок 3, (Рис. 3.31):

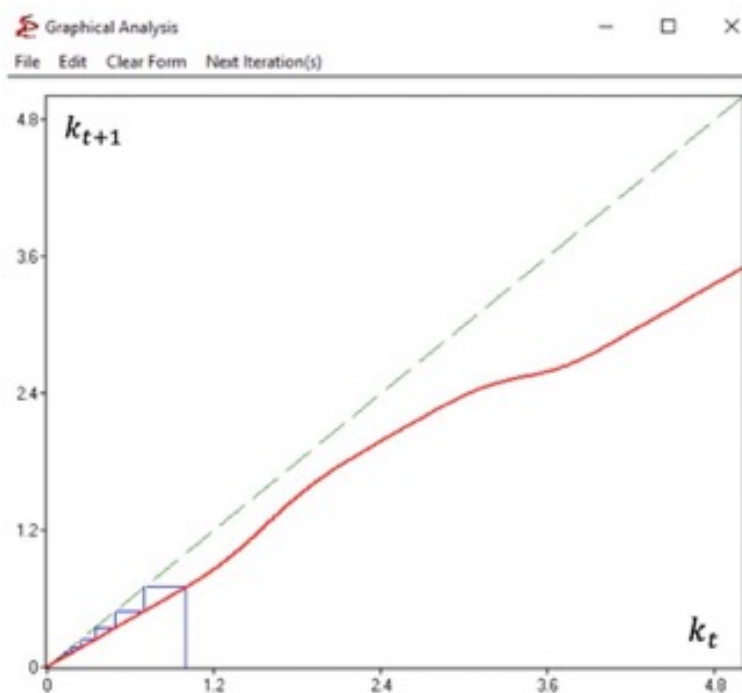


Рисунок 3.31 – Фазова діаграма Випадок 3

Маємо числовий ряд для відповідної фазової діаграми, Рис. 3.32:

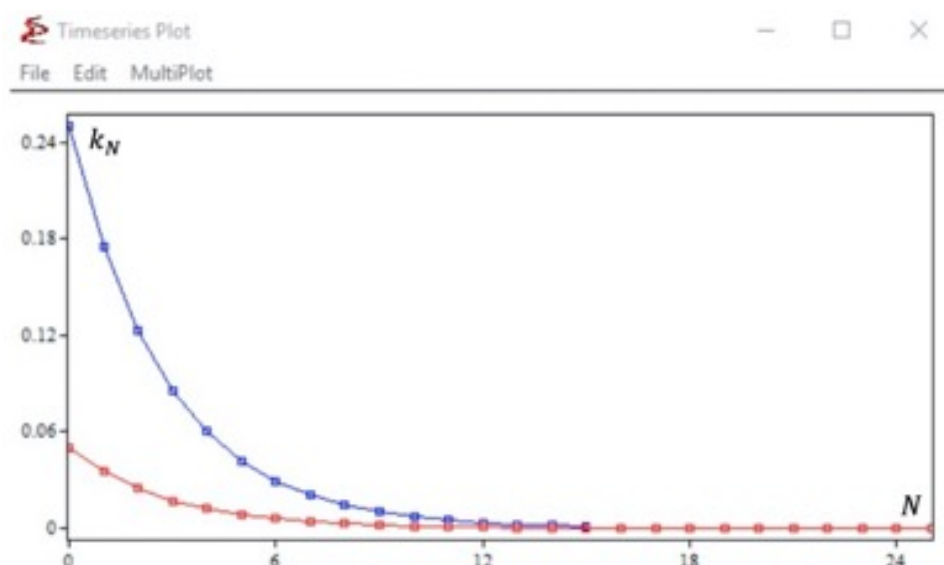


Рисунок 3.32 – Числовий ряд Випадок 3

Числовий ряд для Випадок 3 демонструє одну стійку нерухому точку. Побудуємо залежність  $k_t$  від  $t$  за допомогою пакету Ithink.

Випадок 3:  $\alpha = 1, M = 4, A = 1, p = 2.5, d = 0.2, n = 0, s = 0.3, B = 0, u = -1$ , (Рис. 3.33):



Рис. 3.33. Значення параметрів *Випадок 3*

Отже, маємо одну стійку точку, яка дорівнює нулю, (Рис. 3.34). Це говорить про те, що рівень економіки постійно падає, це властиво для слаборозвинених країн

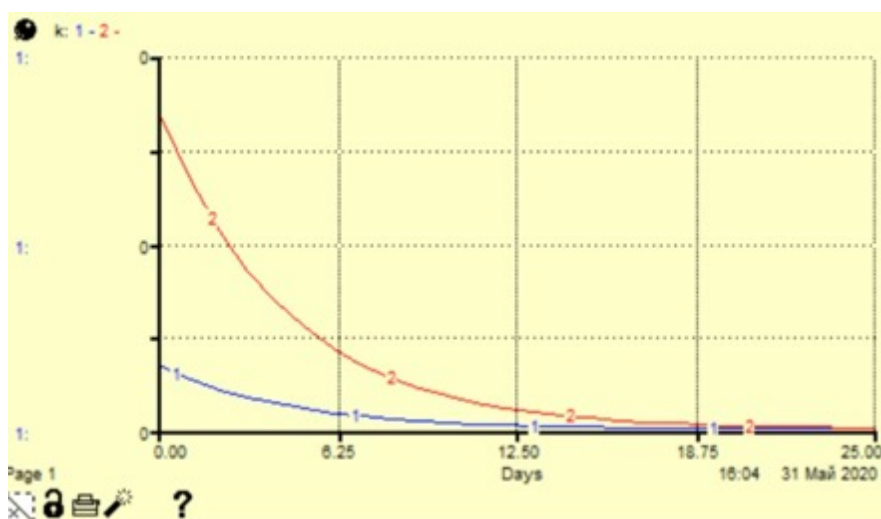


Рисунок 3.34 – Залежність  $k_t$  від  $t$  *Випадок 3*

Розглянемо залежність положення стійкої точки від зміни значень параметрів.

При збільшенні параметра  $A$  (з 1 до 2) отримали, що стійка точка піднялася вгору по осі  $OY$ , як зображено на Рис. 3.35. Отже зростання значення параметра  $A$  позитивно вплинуло на економіку країни.

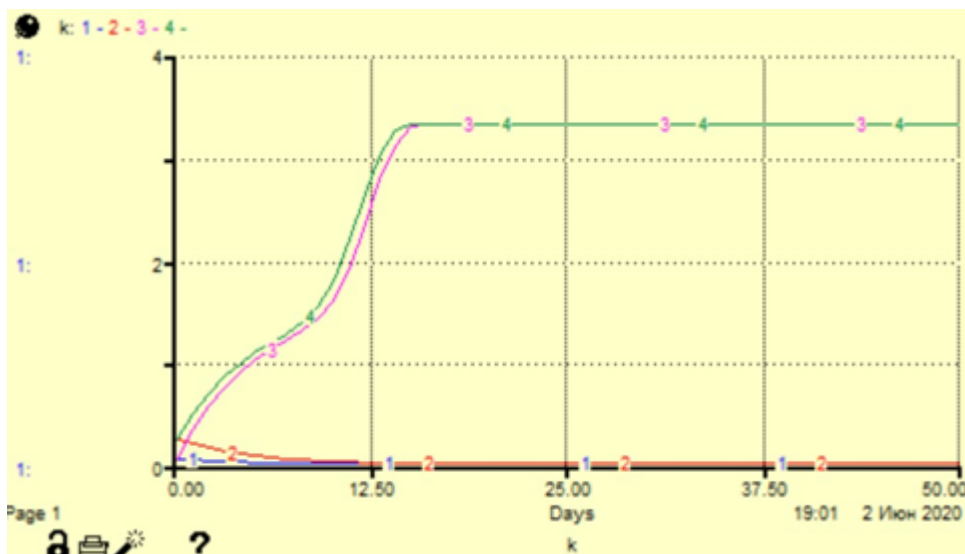


Рисунок 3.35 – Залежність  $k_t$  від  $t$  при зміні параметра  $A$

При зменшенні параметра  $p$  (з 2.5 до 1) стійка точка зросла вгору по осі  $OY$ , як зображено на Рис. 3.36. Отже, при погіршенні показника  $p$  рівень економіки в країні підвищується.

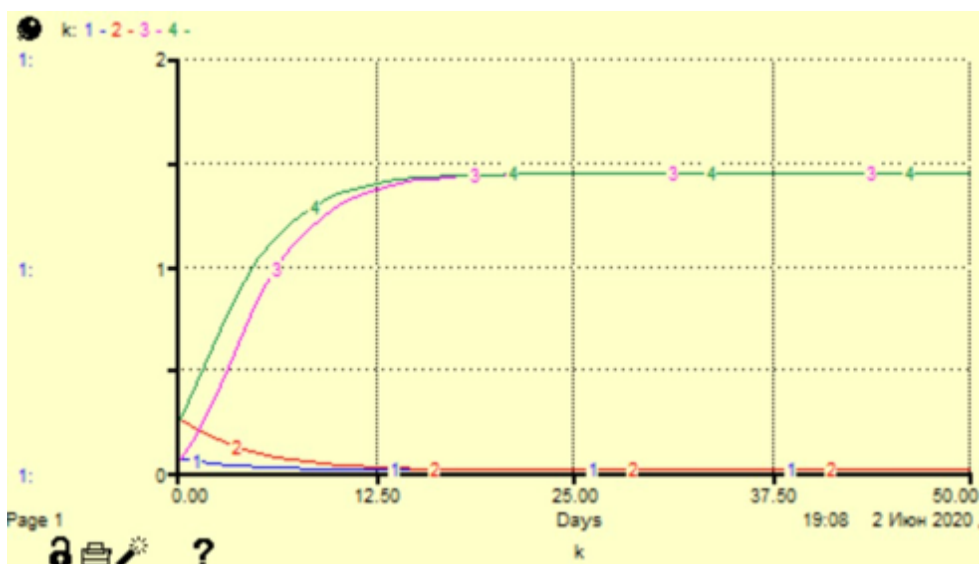


Рисунок 3.36 – Залежність  $k_t$  від  $t$  при зміні параметра  $p$

При збільшенні значення параметра  $d$  спостерігаємо, що положення стійкої точки не змінилося, проте траєкторії кривих зазнала змін, як

зображено на Рис. 3.37. Можна зробити висновок, що параметр  $d$  не впливає на економіку країни.

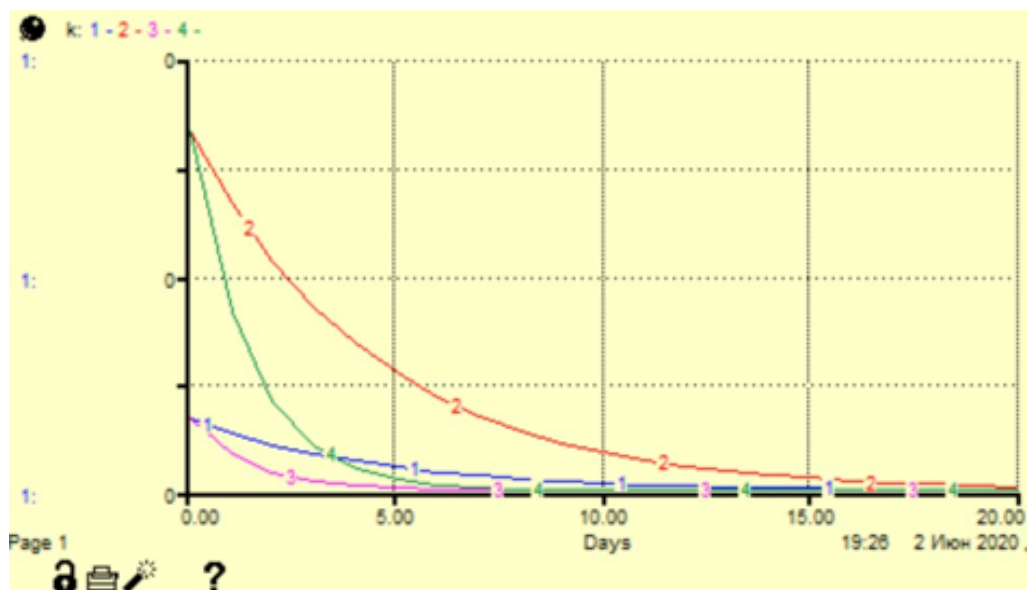


Рисунок 3.37 – Залежність  $k_t$  від  $t$  при зміні параметра  $d$

При збільшенні параметра  $n$  (з 0 до 0.1) стійка точка залишилася незмінною, але траєкторія кривих змінилася, як зображено на Рис. 3.38. Це говорить про те, що параметр  $n$  не має впливу на рівень економіки в країні.

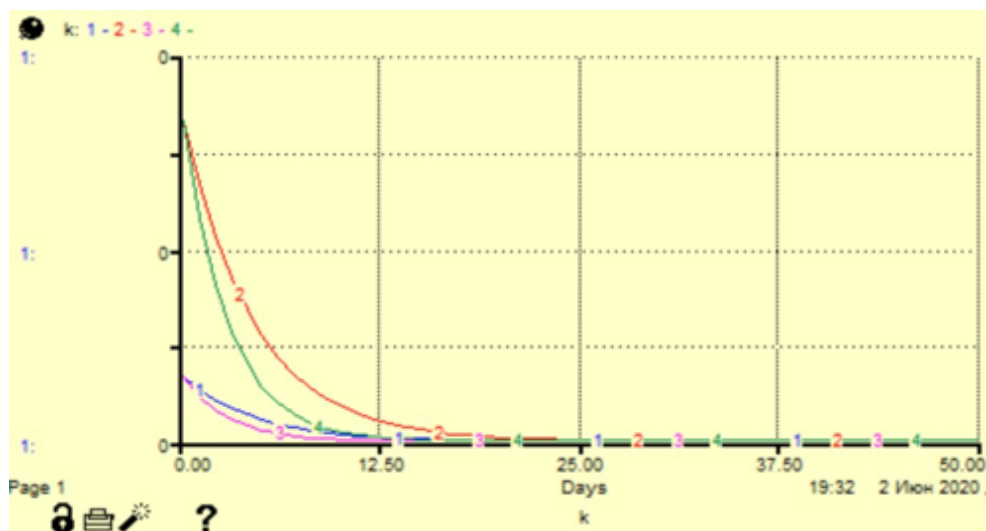


Рисунок 3.38 – Залежність  $k_t$  від  $t$  при зміні параметра  $n$

При збільшенні параметра  $u$  (з -1 до 0) стійка точка піднялася вгору по осі  $OY$ , як зображено на Рис. 3.39. Отже, зростання параметра  $u$  позитивно вплинуло на економіку країни.

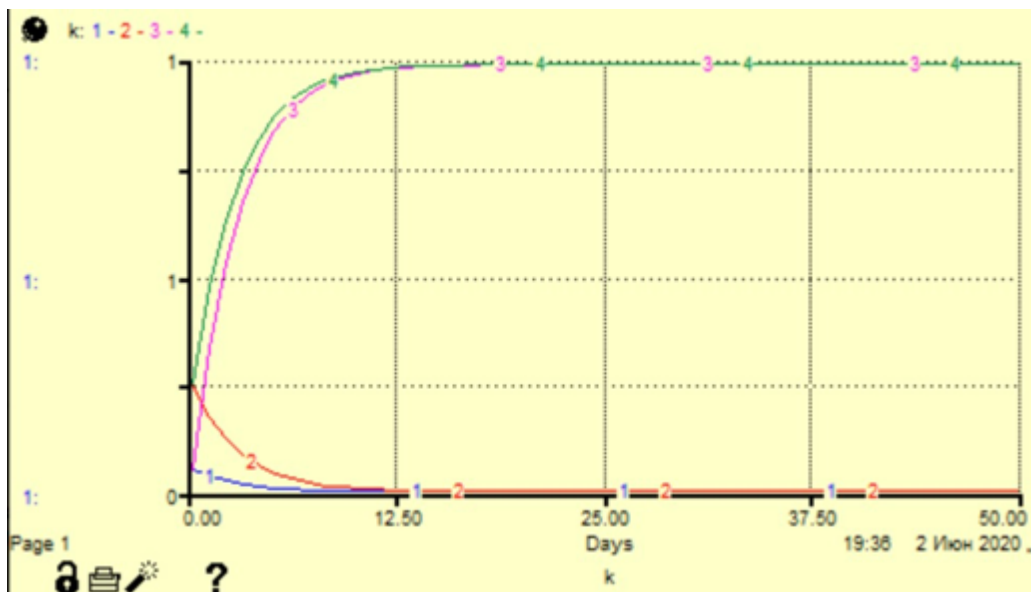


Рисунок 3.39 – Залежність  $k_t$  від  $t$  при зміні параметра  $u$   
 Параметри  $\alpha, M, B, s$  не вплинули на зміну стійкої точки.

Можливість аналізувати модель в дії відрізняє імітаційне моделювання від інших методів, наприклад, від використання Excel або лінійного програмування. Користувач вивчає процеси і вносить зміни в імітаційну модель в ході роботи, що дозволяє краще проаналізувати роботу системи і швидко вирішити поставлене завдання

Після моделювання та аналізу моделі за допомогою пакету Ithink можна зробити висновок, що Ithink є дуже зручний для розробки моделей, має унікальний ефект візуалізації, користувач постійно має доступ до моделі і легко може вносити корективи при необхідності. Пакет дозволяє користуватися засобами для аналізу чутливості - це дозволяє аналізувати модель при багаторазовому запуску з різними значеннями параметрами та початковими умовами.

### 3.4 Висновки до розділу

Розділ містить теоретичні основи імітаційного моделювання та практичний приклади імітаційної моделі Солоу, який був реалізований в програмному пакеті Ithink. Даний пакет дозволяють не тільки швидко

створювати імітаційні моделі за допомогою простих візуальних інструментів, але і проводити аналіз роботи створених моделей і використовувати дані моделі для оцінки впливу управлінських рішень на перебіг економічних процесів в модельованих системах. Також пакет має ряд переваг, які є ключовими при побудові та аналізі моделі. А саме вбудовані блоки для полегшення створення різних видів моделей, розвинені засоби аналізу чутливості, детальна навчальна програма.

## РОЗДІЛ 4. ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ

### 4.1 Постановка завдання проектування

Проводиться оцінка основних характеристик програмного продукту, призначеного для імітаційного моделювання та прогнозування моделі зросту економіки за допомогою програми E&FChaos. Програмний продукт призначено для використання на персональних комп'ютерах під управлінням операційних систем Windows.

### 4.2 Обґрунтування функцій програмного продукту

Головна функція  $F_0$  – розробка програмного продукту, який отримує вхідні дані та будує модель для аналізу та оцінювання. Виходячи з конкретної мети, можна виділити наступні основні функції ПП:

$F_1$ (*вибір мови програмування*): а) мова програмування Python; б) E&FChaos;

$F_2$ (*використання функцій для моделювання*): а) побудова моделі за допомогою існуючих функцій; б) побудова моделі за допомогою написання власних функцій

$F_3$ (*інтерфейс користувача*): а) інтерфейс користувача з підтримкою зчитування даних з файлу; б) інтерфейс користувача з підтримкою введення даних вручну.

Представлена морфологічна карта всіх можливих варіантів реалізації функцій (Рис. 4.1):

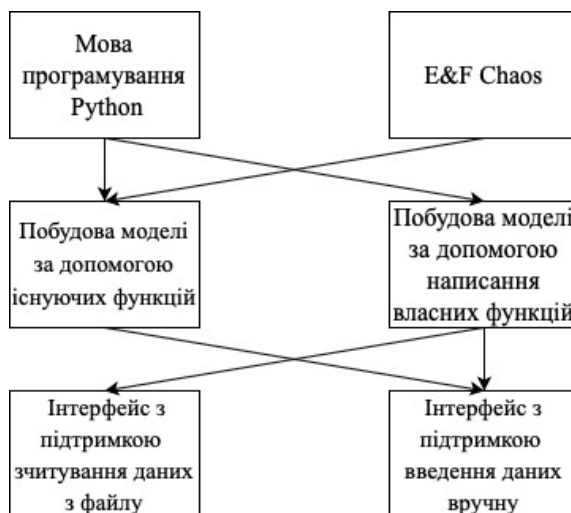


Рисунок 4.1 – Морфологічна карта

На основі цієї карти побудовано позитивно-негативну матрицю варіантів основних функцій (Таблиця 4.1).

Таблиця 4.1 – Позитивно-негативна матриця

Основні функції	Варіанти реалізації	Переваги	Недоліки
$F1$	$A$	Широкий спектр можливостей для розв'язання задач	Потребує більше часу для написання програмного продукту
	$B$	Зручний для побудування економічних моделей	
$F2$	$A$	Не займає багато часу	Необхідно детально вивчити існуючі функції
	$B$	Враховуються будь-які потреби користувача	Знання мови програмування, більша затрата часу
$F3$	$A$	Використовується мало часу	Не можливо перевірити дані
	$B$	Наглядно спостерігаються дані, які вводяться	Займає більше часу

На основі аналізу позитивно-негативної матриці робимо висновок, що при використанні програмного продукту деякі варіанти функцій варто



відкинути, тому, що вони не відповідають поставленим перед програмним продуктом задачам. Ці варіанти відзначені у морфологічній карті.

Функція *F1*:

Велике значення має час, який затрачується на отримання кінцевого результату, тому варіант а) може бути відкинтий.

Функція *F2*:

Для побудови економічних моделей достатньо використання вбудованих функцій, які не займають багато часу, тому варіант а) може бути прийнятим.

Функція *F3*:

Будь-який спосіб введення даних може бути прийнятним.

Таким чином, будемо розглядати такі варіанти використання ПП:

1) *F1b – F2a – F3a*; 2) *F1b – F2a – F3b*.

#### 4.3 Обґрунтування системи параметрів ПП

Для того, щоб охарактеризувати програмний продукт, будемо використовувати наступні параметри:

*X1(швидкодія мови програмування)* : відображає швидкодію операцій залежно від обраної мови програмування.

*X2(час на реалізацію необхідних функцій)* : відображає час, який витрачається реалізації функцій, які необхідні для побудови моделі.

*X3(об'єм пам'яті для збереження даних)* : відображає об'єм пам'яті в оперативній пам'яті персонального комп'ютера, необхідний для збереження та обробки даних під час виконання програми.

*X4(потенційний об'єм програмного коду)*: показує розмір програмного коду який необхідно створити безпосередньо розробнику.

Гірші, середні і кращі значення параметрів вибираються на основі вимог замовника та умов функціонування у Таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 – Основні параметри ПП

Назва параметра	Умовні позначення	Одиниці виміру	Значення параметра		
			гірші	середні	кращі
Швидкість мови програмування	X1	Оп/мс	500	1000	5000
Час на реалізацію необхідних функцій	X2	Год	10	5	2
Об'єм пам'яті для збереження даних	X3	Мб	32	16	8
Потенційний об'єм програмного коду	X4	кількість строк коду	3000	1000	400

За даними таблиці 2 будуються графічні характеристики параметрів, що зображено на Рис. 4.2 – 4.5:

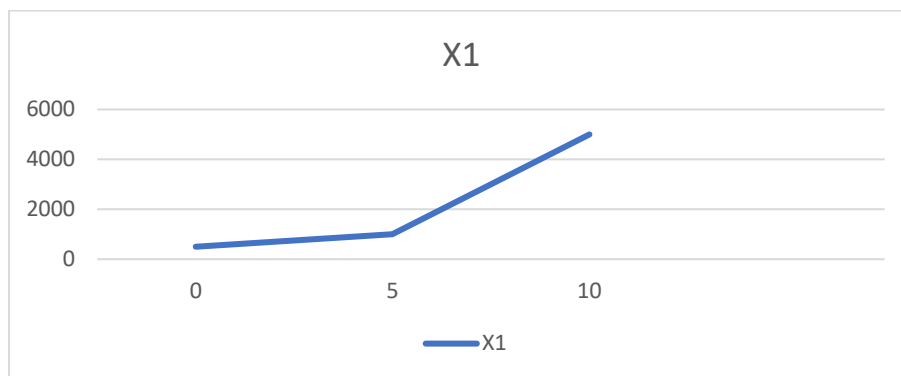


Рисунок 4.2 – X1, швидкість мови програмування

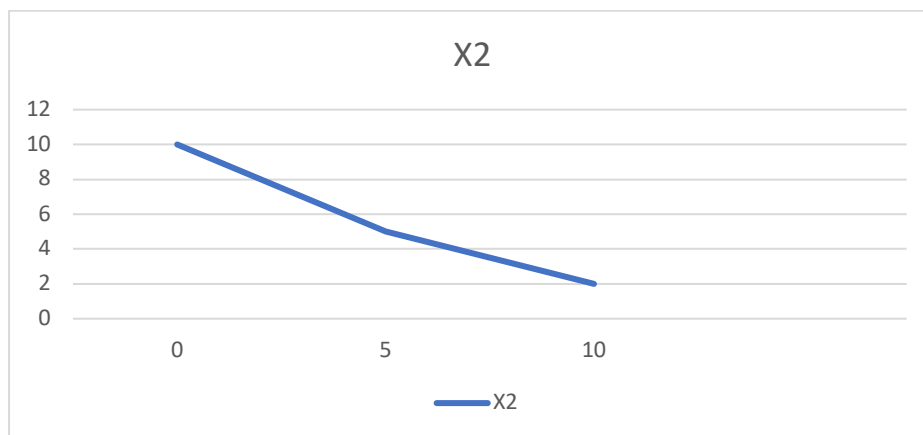


Рисунок 4.3 – X2, час на реалізацію необхідних функцій

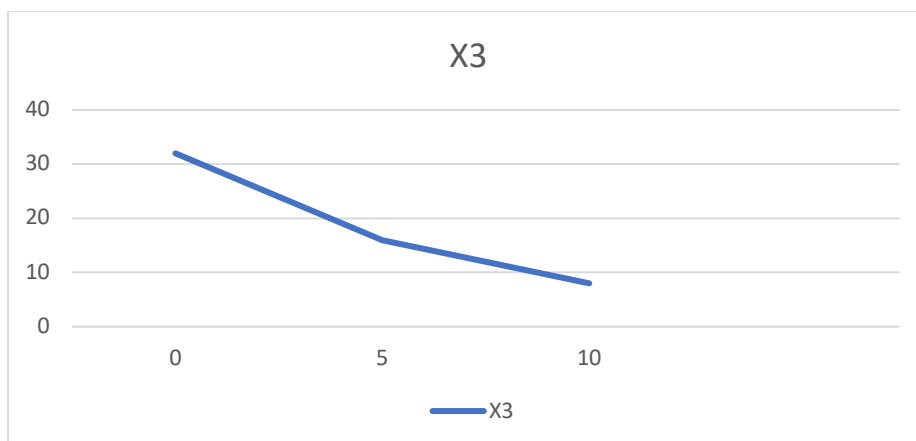


Рисунок 4.4 – X3, об'єм пам'яті для збереження даних

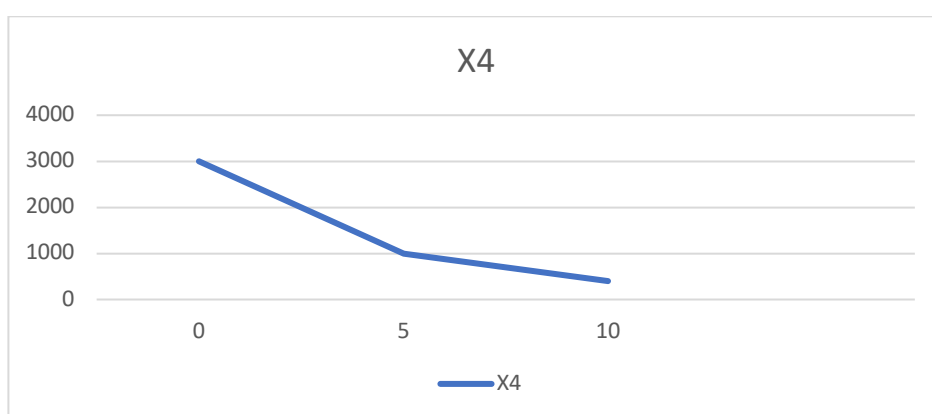


Рисунок 4.5 – X4, потенційний об'єм програмного коду

Після детального обговорення й аналізу кожний експерт оцінює ступінь важливості кожного параметру для конкретно поставленої цілі.

Результати експертного ранжування наведені у таблиці 3.

Таблиця 4.3 – Результати ранжування параметрів

Позначення параметра	Назва параметра	Одиниці виміру	Ранг параметра за оцінкою експерта							Сума рангів $R_i$	Відхилення $\Delta_i$	$\Delta_i^2$ -відповідно будуть іншими
			1	2	3	4	5	6	7			
X1	Швидкодія мови програмування	Оп/мс	4	3	3	3	4	3	4	24	6.5	42.25

Кінець таблиці 4.3

$X_2$	Час на реалізацію необхідних функцій	Мс	1	1	2	1	1	2	2	10	-7.5	56,25
$X_3$	Об'єм пам'яті для збереження даних	Мб	2	2	1	2	3	1	1	12	-5.5	30,25
$X_4$	Потенційний об'єм програмного коду	кількість строк коду	3	4	4	4	2	4	3	24	6.5	42.25
	Разом		10	10	10	10	10	10	10	70	0	171

Найбільший ранг = 4; найменший ранг = 1.

Для перевірки степені достовірності експертних оцінок, визначимо наступні параметри:

а) сума рангів кожного з параметрів і загальна сума рангів:

$$R_i = \sum_{j=1}^N r_{ij} R_{ij} = \frac{Nn(n+1)}{2} = 70$$

де  $N$  – число експертів,  $n$  – кількість параметрів;

б) середня сума рангів:

$$T = \frac{1}{n} R_{ij} = 17.5$$

в) відхилення суми рангів кожного параметра від середньої суми рангів:

$$\Delta_i = R_i - T$$

Сума відхилень по всіх параметрах повинна дорівнювати 0;

г) загальна сума квадратів відхилення:

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_i^2 = 171$$

Порахуємо коефіцієнт узгодженості:

$$W = \frac{12S}{N^2(n^3 - n)} = \frac{12 \cdot 171}{7^2(4^3 - 4)} = 0.69 > W_k = 0.67$$

Скориставшись результатами ранжирування, проведемо попарне порівняння всіх параметрів і результати занесемо у таблицю 4.

Таблиця 4.4 – Попарне порівняння параметрів

Параметри	Експерти							Кінцева оцінка	Числове значення
	1	2	3	4	5	6	7		
X1 і X2	>	>	>	>	>	>	>	>	1.5
X1 і X3	>	>	>	>	>	>	>	>	1.5
X1 і X4	>	<	<	<	>	<	>	<	0.5
X2 і X3	<	<	>	<	<	>	>	<	0.5
X2 і X4	<	<	<	<	<	<	<	<	0.5
X3 і X4	<	<	<	<	>	<	<	<	0.5

Числове значення, що визначає ступінь переваги  $i$ -го параметра над  $j$ -тим,  $a_{ij}$  визначається по формулі:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1.5 & \text{при } X_i > X_j \\ 1.0 & \text{при } X_i = X_j \\ 0.5 & \text{при } X_i < X_j \end{cases}$$

З отриманих числових оцінок переваги складемо матрицю  $A = \|a_{ij}\|$ . Для кожного параметра зробимо розрахунок вагомості  $K_{vi}$  за наступними формулами:

$$K_{vi} = \frac{b_i}{\sum_{i=1}^n b_i}$$

$$\text{де } b_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}.$$

Таблиця 4.5 – Розрахунок вагомості параметрів

Параметри $X_i$	Параметри $X_j$				Перша ітер.		Друга ітер.		Третя ітер.	
	X1	X2	X3	X4	$b_i$	$K_{vi}$	$b_i^1$	$K_{vi}^1$	$b_i^2$	$K_{vi}^2$
X1	1.0	1.5	1.5	0.5	4.5	0.281	16.25	0.275	59.125	0.274
X2	0.5	1.0	0.5	0.5	2.5	0.156	9.25	0.157	34.125	0.158
X3	0.5	1.5	1.0	0.5	3.5	0.219	12.25	0.208	44.875	0.208
X4	1.5	1.5	1.5	1.0	5.5	0.344	21.25	0.360	77.875	0.36
Всього:					16	1	59	1	216	1

Абсолютні значення параметрів  $X2$  (об'єм пам'яті для збереження даних) та  $X1$  (швидкодія мови програмування) та  $X2$  (час на реалізацію необхідних функцій) відповідають технічним вимогам умов функціонування даного ПП. Абсолютне значення параметра  $X3$  (об'єм пам'яті для збереження даних) та  $X4$  обрано не найгіршим (не максимальним).

Коефіцієнт технічного рівня для кожного варіанта реалізації ПП розраховується так (таблиця 6):

$$K_K(j) = \sum_{i=1}^n K_{Bi,j} B_{i,j}$$

Таблиця 4.6 – Розрахунок показників рівня якості варіантів реалізації функцій ПП

Основні функції	Варіант реалізації функції	Параметри	Абсолютне значення параметра —	Бальна оцінка параметра	Коефіцієнт вагомості параметра	Коефіцієнт рівня якості
F1	Б	X1	5000	10	0.208	2.08
F2	А	X2	2	10	0.274	2.74
F3	А	X3	22	3	0.158	0.474
		X4	2000	3	0.36	1.08
	Б	X3	13	7	0.158	1.106
		X4	700	8	0.36	2.88

За даними з таблиці 6 за формулою:

$$K_K = K_{Ty}[F_{1k}] + K_{Ty}[F_{2k}] + \dots + K_{Ty}[F_{zk}]$$

визначаємо рівень якості кожного з варіантів:

$$K_{K1} = 2.08 + 2.74 + 0.474 + 1.08 = 6.374,$$

$$K_{K2} = 2.08 + 2.74 + 1.106 + 2.88 = 8.806$$

Як видно з розрахунків, кращим є другий варіант, для якого коефіцієнт технічного рівня має найбільше значення.

#### 4.4 Економічний аналіз варіантів розробки ПП

Для визначення вартості використання ПП спочатку проведемо розрахунок трудомісткості.

Всі варіанти включають в себе два окремих завдання:

1. Розробка проекту програмного продукту;
2. Розробка програмної оболонки:
  - Для першого варіанту реалізації використовуємо Python
  - Для другого варіанту реалізації використовуємо E&FChaos

3. Опрацювання моделі для використання

Для першого завдання (ступінь новизни А, група складності 1, використана інформація)  $T_P = 90$ ,  $K_{\Pi} = 1.7$ ,  $K_{СК} = 1$ ,  $K_{СТ} = 0.8$ ,  $K_{СТ.М} = 1.6$ .

$$T_1 = 90 * 1.7 * 1 * 0.8 * 1.6 = 195.84 \text{ людино-днів}$$

Для другого завдання (варіант А, ступінь новизни Б, група складності 3, використана інформація)  $T_P = 19$ ,  $K_{\Pi} = 0.9$ ,  $K_{СК} = 1$ ,  $K_{СТ} = 0.8$ ,  $K_{СТ.М} = 1$ .

$$T_2^1 = 19 * 0.9 * 1 * 0.8 * 1 = 13.68 \text{ людино-днів}$$

Для другого завдання (варіант Б, ступінь новизни В, група складності 2, використана інформація)  $T_P = 19$ ,  $K_{\Pi} = 0.72$ ,  $K_{СК} = 1$ ,  $K_{СТ} = 0.6$ ,  $K_{СТ.М} = 1$

$$T_2^2 = 19 * 0.72 * 1 * 0.6 * 1 = 8.208 \text{ людино-днів}$$

Для третього завдання (ступінь новизни В, група складності 3, використана інформація – НДІ та ПІ)  $T_P = 12$ ,  $K_{СК} = 1$ ,  $K_{СТ} = 0.6$ ,  $K_{СТ.М} = 1$

$$K_{\Pi} = \frac{K_1 n + K_2 m}{n + m} = \frac{1 * 3 + 0.6 * 2}{2 + 3} = 0.84,$$



$$T_2 = 12 * 0.84 * 0.6 = 6.048 \text{ людино-днів}$$

Складаємо трудомісткість відповідних завдань для кожного з обраних варіантів реалізації програми, щоб отримати їх трудомісткість:

$$T_I = 195.84 + 13.68 + 6.048 = 215.568$$

$$T_{II} = 195.84 + 8.208 + 6.048 = 210.096$$

Найбільш високу трудомісткість має варіант I.

В розробці беруть участь один аналітик з окладом 12000 грн., один програміст з окладом 10000 грн. Визначимо зарплату за годину за формулою:

$$CЧ = \frac{M}{T_m * t} \text{ грн,}$$

$$CЧ = \frac{12000 + 10000}{2 * 21 * 8} = 67.07 \text{ грн}$$

Тоді, розрахуємо заробітну плату за формулою:

$$C_{ЗП} = C_{ч} * T_i * КД$$

Зарплата розробників за варіантами становить:

$$I. \quad C_{ЗП} = 67.07 * 215.568 * 1.2 = 17349.78 \text{ грн.}$$

$$II. \quad C_{ЗП} = 67.07 * 210.096 * 1.2 = 16909.37 \text{ грн.}$$

Відрахування на єдиний соціальний внесок становить 22%:

$$I. \quad C_{ВІД} = C_{ЗП} * 0.22 = 17349.78 * 0.22 = 3816.95 \text{ грн.}$$

$$\text{II. } C_{\text{ВІД}} = C_{\text{ЗП}} \cdot 0.22 = 16909.37 \cdot 0.22 = 3720.06 \text{ грн.}$$

Тепер визначимо витрати на оплату однієї машино-години. ( $C_M$ )

Так як одна ЕОМ обслуговує одного програміста з окладом 10000 грн., з коефіцієнтом зайнятості 0,2 то для однієї машини отримаємо:

$$C_G = 12 \cdot M \cdot K_3 = 12 \cdot 10000 \cdot 0.2 = 24000 \text{ грн.}$$

З урахуванням додаткової заробітної плати:

$$C_{\text{ЗП}} = C_G \cdot (1 + K_3) = 24000 \cdot (1 + 0.2) = 28800 \text{ грн.}$$

Відрахування на єдиний соціальний внесок:

$$C_{\text{ВІД}} = C_{\text{ЗП}} \cdot 0.22 = 28800 \cdot 0.22 = 6336 \text{ грн.}$$

Амортизаційні відрахування розраховуємо при амортизації 10% та вартості ЕОМ – 30000 грн:

$$C_A = K_{\text{ТМ}} \cdot K_A \cdot Ц_{\text{ПР}} = 1.03 \cdot 0.1 \cdot 30000 = 3090 \text{ грн.}$$

Витрати на ремонт та профілактику розраховуємо як:

$$C_P = K_{\text{ТМ}} \cdot Ц_{\text{ПР}} \cdot K_P = 1.03 \cdot 30000 \cdot 0.04 = 1236 \text{ грн.}$$

Ефективний годинний фонд часу ПК за рік розраховуємо за формулою:

$$T_{\text{ЕФ}} = (D_{\text{К}} - D_{\text{В}} - D_{\text{С}} - D_{\text{Р}}) \cdot t_{\text{З}} \cdot K_{\text{В}} = (365 - 104 - 8 - 16) \cdot 8 \cdot 0.9 = 1706.4 \text{ годин}$$

Витрати на оплату електроенергії розраховуємо за формулою:

$$C_{\text{ЕЛ}} = T_{\text{ЕФ}} \cdot N_{\text{С}} \cdot K_{\text{З}} \cdot C_{\text{ЕН}} = 1706.4 \cdot 0.6 \cdot 0.9 \cdot 1.29677 \cdot 1.2 = 1433.904 \text{ грн.}$$

Накладні витрати розраховуємо за формулою:

$$C_{\text{Н}} = C_{\text{ГР}} \cdot 0.67 = 30000 \cdot 0.67 = 20100 \text{ грн.}$$

Тоді, річні експлуатаційні витрати будуть:

$$C_{\text{ЕКС}} = C_{\text{ЗП}} + C_{\text{ВІД}} + C_{\text{А}} + C_{\text{Р}} + C_{\text{ЕЛ}} + C_{\text{Н}} = 60995.904 \text{ грн.}$$

Собівартість однієї машино-години ЕОМ дорівнюватиме:

$$C_{\text{М-Г}} = C_{\text{ЕКС}} / T_{\text{ЕФ}} = 60995.904 / 1706.4 = 35.745 \text{ грн/час.}$$

Оскільки в даному випадку всі роботи, які пов'язані з використанням програмного продукту ведуться на ЕОМ, витрати на оплату машинного часу, в залежності від обраного варіанта реалізації, складає:

$$C_{\text{М}} = C_{\text{М-Г}} \cdot T$$

$$\text{I. } C_{\text{М}} = 35.745 \cdot 215.568 = 7705.48 \text{ грн.};$$

$$\text{II. } C_{\text{М}} = 35.745 \cdot 210.096 = 7509.88 \text{ грн.};$$

Накладні витрати складають 67% від заробітної плати:

$$C_H = C_{3П} \cdot 0,67$$

$$I. \quad C_H = 7705.478 \cdot 0.67 = 5162.67 \text{ грн.};$$

$$II. \quad C_H = 7509.882 \cdot 0.67 = 5031.62 \text{ грн.};$$

Отже, вартість розробки ПП за варіантами становить:

$$C_{ПП} = C_{3П} + C_{ВІД} + C_M + C_H$$

$$I. \quad C_{ПП} = 17349.78 + 3816.95 + 7705.48 + 5162.67 = 34034.88 \text{ грн.};$$

$$II. \quad C_{ПП} = 16909.37 + 3720.06 + 7509.88 + 5031.62 = 33170.93 \text{ грн.};$$

#### 4.5 Вибір кращого варіанта ПП техніко-економічного рівня

Розрахуємо коефіцієнт техніко-економічного рівня за формулою:

$$K_{TEPj} = K_{Kj} / C_{Фj}$$

$$K_{TEP1} = 6.374 / 34034.88 = 1.87 \cdot 10^{-4};$$

$$K_{TEP2} = 8.806 / 33170.93 = 2.65 \cdot 10^{-4};$$

Як бачимо, другий варіант реалізації програми є більш ефективним з коефіцієнтом техніко-економічного рівня  $K_{TEP2} = 2.65 \cdot 10^{-4}$ .

#### 4.6 Висновки до розділу

В даному розділі проведено повний функціонально-вартісний аналіз ПП, який було розроблено в рамках дипломного проекту.

На першому етапі аналізу було визначено основні функції ПП та сформовано множину варіантів їх реалізації; на основі обчислених значень параметрів, а також експертних оцінок їх важливості було обчислено

коефіцієнт технічного рівня, який і дав змогу визначити оптимальну з технічної точки зору альтернативу реалізації функцій ПП.

На другому етапі був проведений аналіз по вибору найбільш економічно обґрунтованого варіанту реалізації. Порівняння запропонованих варіантів реалізації в рамках даної частини виконувалось за коефіцієнтом ефективності, для обчислення якого були обчислені такі допоміжні параметри, як трудомісткість, витрати на заробітну плату, накладні витрати. Найкращим показником техніко-економічного рівня якості виявився  $K_{\text{TEP2}} = 2.65 \cdot 10^{-4}$ .

## ВИСНОВКИ

Економічний ріст є однією з цілей економічної політики будь-якої сучасної країни. Від того, наскільки буде ефективно зроблена керівництвом країни політика по стимуляції економічного росту, напрямку залежить рівень суспільного благополуччя. Одним зі способів підвищити рівень економіки країни – це побудувати імітаційну модель економічного зростання Солоу, що і було виконано в даній роботі.

Імітаційне моделювання вирішує багатозадачні проблеми реального світу. Це зручний інструмент для аналізу: він наочний, простий для розуміння і перевірки. У різних областях бізнесу і науки імітаційне моделювання допомагає знайти оптимальні рішення і дає чітке уявлення про складні системи. До переваг такого підходу вирішення задачі можна віднести:

- безпечне застосування і аналізування можливих сценаріїв;
- імітаційна модель відображає набагато більше деталей, ніж аналітична, що значно підвищує точність, а прогнози на основі такої моделі більш визначеними;
- невизначеність у часі і результати операцій легко відображаються, що дозволяє оцінити ступінь ризику і знайти найбільш надійні рішення.

Враховуючи усі вище перераховані можливості імітаційного моделювання, на основі рівнянь, що описують стан економічної системи в моделі Солоу, побудована імітаційна модель в програмному середовищі Ithink. Ця модель дозволяє досліджувати рушійні сили економічного зростання і його особливості при різних поєднаннях праці і капіталу. Змінюючи початкові умови в побудованій моделі можна досліджувати функціонування економічної системи в різних умовах. Проведені дослідження показали, що від початкових даних, можна отримати три

сценарії, які властиві країнам різного розвитку, а саме: високорозвинені, слаборозвинені та країни з періодичною економікою. Також був проведений детальний аналіз всіх параметрів моделі, що дає можливість покращувати рівень економіки.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. Москва: Наука, 1984. 296 с.
2. Горбунов А.Р. Пакет структурного моделирования Ithink: инвестиционные проекты, реинжиниринг, стратегия. Москва: Торакс-центр, 1997. – 24 с.
3. Дыхта В.А. Динамические системы в экономике. Введение в анализ одномерных моделей. Учебное пособие. Иркутск: БГУЭП, 2003. 178 с.
4. Экономическая теория. / ред. А.И. Добрынина, Л.С. Тарасевича. Санкт-Петербург: Питер, 1999. 544 с.
5. Емельянов А.А., Власова Е.А., Дума Р.В. Имитационное моделирование экономических процессов. Москва: Финансы и статистика, 2004. 368 с.
6. Кетков Ю. Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. MatLab 6.x.: программирование численных методов. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2004. 672 с.
7. Кузнецов Ю.А., Перова В.И., Мичасова О.В. Работа с программным пакетом Ithink: Учебно-методическое пособие. Н. Новгород: ННГУ, 2005. 72 с.
8. Сидоренко В.Н. Системно-динамическое моделирование экономического роста. Моделирование и прогнозирование социально-экономических процессов. 1999 г. С. 33 – 44.
9. Сидоренко В.Н. Системная динамика. Москва: ТЕИС, 1998. 205 с.
10. Старцев Ю. Н. S-образные модели развития и технологические разрывы. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/s-obraznye-modeli-razvitiya-i-tehnologicheskie-razryvy> (дата звернення 15.11.2019)
11. Чепурина М.Н., Киселевой Е. А. Курс экономической теории. Киров: АСА, 2006. 832 с.



12. Chiang A. Fundamental Methods of Mathematical Economics. Third ed. New York: McGraw - Hill International Editions, 1984. 788p.
13. C. Diks, C. Hommes, V. Panchenko, M. Tyszler, Manual E&F Chaos Program. Amsterdam: CeNDEF, University of Amsterdam, 2008. 68 p.
14. Kaplan, Daniel, Glass, Leon. Understanding Nonlinear Dynamics. New York: Springer-Verlag, 1995. 420 p.
15. Peterson S., Richmond B. Ithink Technical Documentation. Honover: High Performance Systems, 1997. 394 p.
16. Robert J Barro; Xavier Sala-i-Martin. Economic growth. Cambridge, Mass. : MIT Press, 2004.
17. Sterman, J.D. System Dynamics Models for Project Management. Massachusetts: MIT Sloan School of Management, 1992.

## ДОДАТКИ

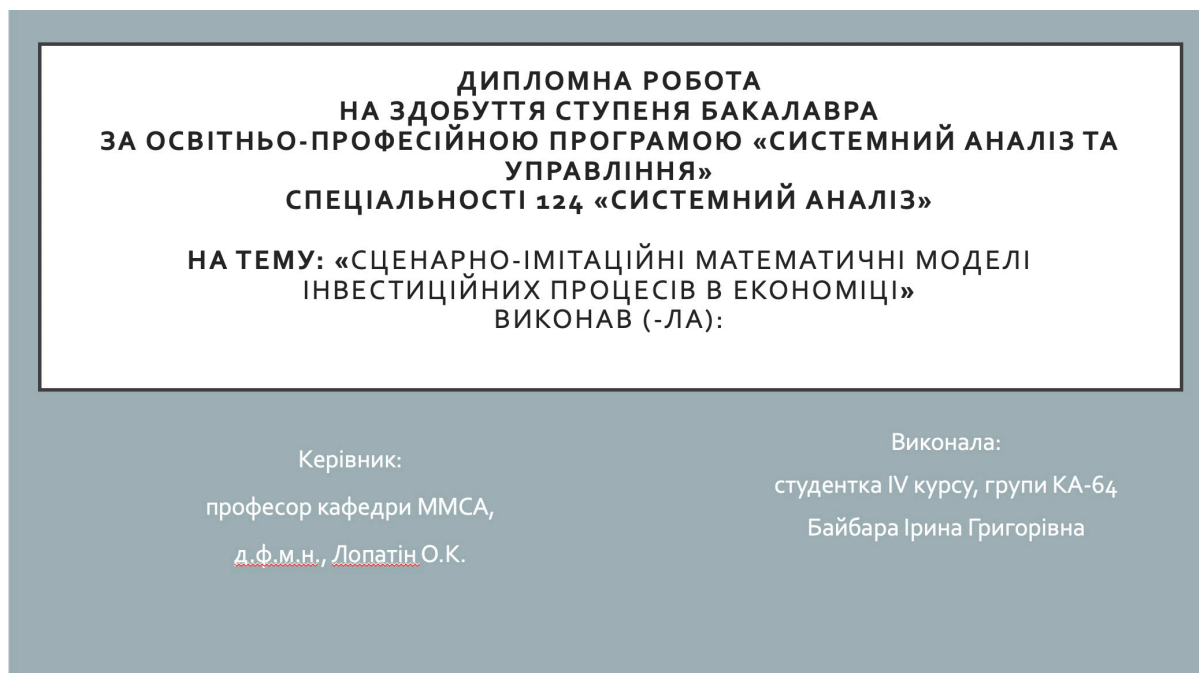


Рисунок А.1

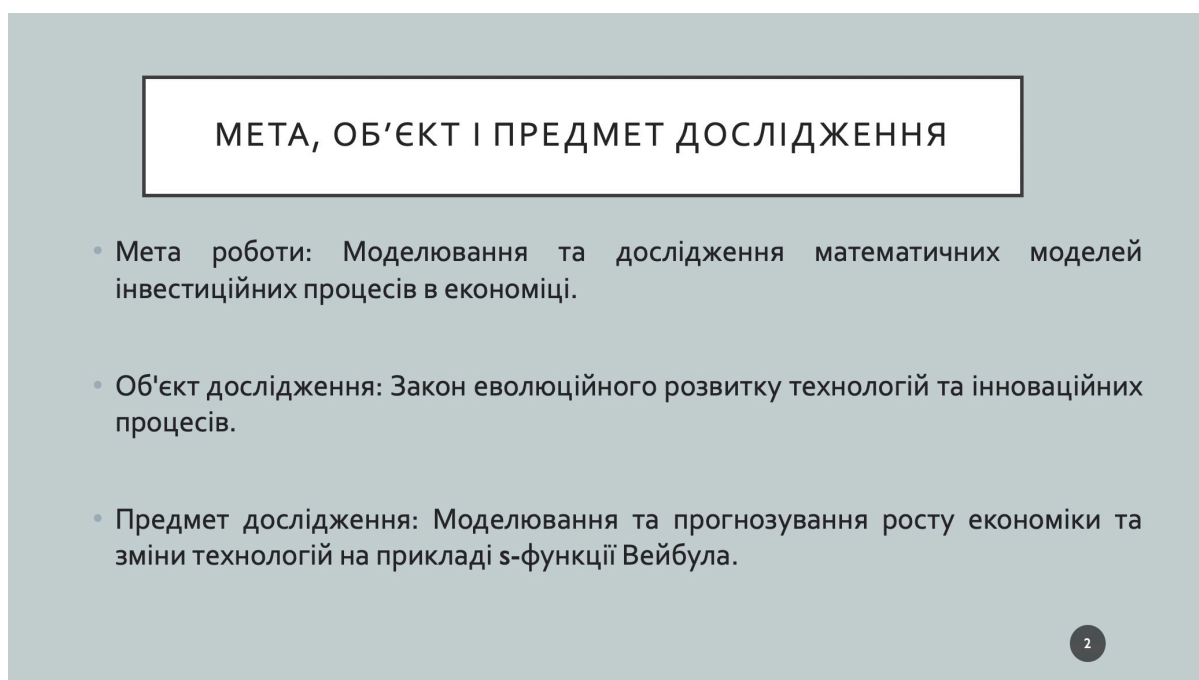


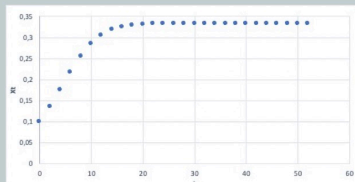
Рисунок А.2

### НЕЛІНІЙНІ СКІНЧЕНО-РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ

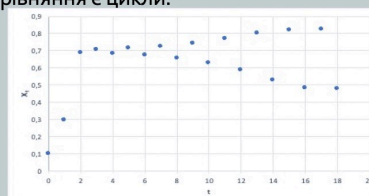
Скінчено-різницеве рівняння:  $N_{t+1} = (R - bN_t) \cdot N_t = RN_t - bN_t^2$

Розглянемо конкретні значення для параметра  $R$ , щоб вивчити поведінку рівняння:

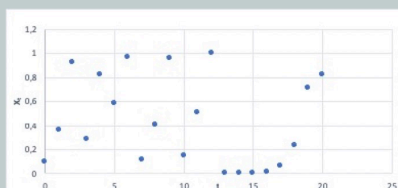
**Стійкий стан.** Нелінійне рівняння може мати розв'язок, яке наближається до певного положення і залишається фіксованим.



**Періодичні цикли.** В розв'язку нелінійного рівняння є цикли.



**Аперіодична поведінка.** Розв'язок нелінійного рівняння може коливатися, але не періодично, тобто не можна спостерігати ні експоненціального росту або згасання, а ні стаціонарного стану.



3

Рисунок А.3

### МОДЕЛЬ РОСТУ СОЛОУ

Основні складові елементи моделі:

- Виробнича функція:  $Y_t = F(K_t, L_t, A_t)$ , де  $K$ -капітал,  $L$ -робоча сила,  $A$ -технології
- Незмінний ефект масштабу:
- $F(\lambda K_t, \lambda L_t) = \lambda F(K_t, L_t)$
- Часто розглядається окремий випадок: виробнича функція Кобба-Дугласа, за допомогою технології збільшення праці:
- $F(K, L) = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$

4

Рисунок А.4

## УЗАГАЛЬНЕННЯ МОДЕЛІ СОЛОУ ЗРОСТАННЯ ЕКОНОМІКИ НА ОСНОВІ S-ФУНКЦІЇ ВЕЙБУЛА

- Модель відома як модель зростання Вейбула:

$$f(k_t) = L - (L - b)e^{-(kt)^d},$$

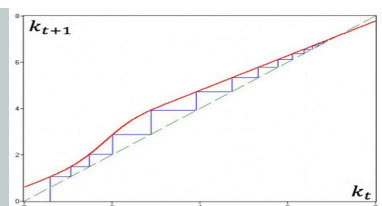
де  $l$  – довжина (або ширина, висота, розмір) і  $t$  – час.

- *Мета*: знайти стійку точку спокою.
- Розглянемо рівняння Солоу:  $k_{t+1} = sf(k_t) + (1 - n - d)k_t + u$
- $k_t$  – капітал на душу населення;
- $s$  – частка інвестицій від ВВП;
- $n$  – частка зростання населення;
- $n = \frac{L_{t+1} - L_t}{L_t}$
- $d$  – частка амортизації і ремонту устаткування.

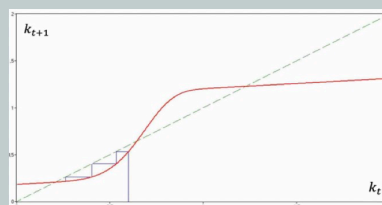
5

Рисунок А.5

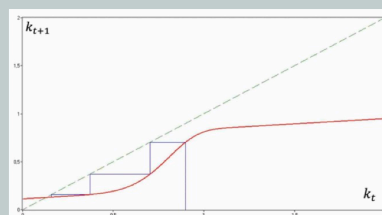
- *Випадок 1*: Одна стійка нерухома точка  
(крива  $G(k_t)$  після точки  $k_0$  проходить вище бісектриси)



- *Випадок 2*: Три нерухомі точки, серед яких дві стійкі і одна нестійка точка (крива  $G(k_t)$  після точки  $k_0$  перетинає бісектрису в двох точках)



- *Випадок 3*: Одна стійка нерухома точка  
(крива  $G(k_t)$  після точки  $k_0$  проходить нижче бісектриси)



6

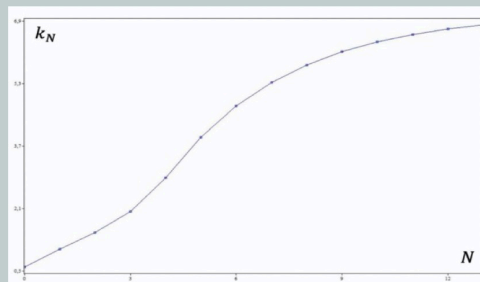
Рисунок А.6

- Випадки 2 і 3 непридатні, тому що у випадку 2 точка  $k_2^*$ , яка знаходиться далі точки  $k_0$  є нестійкою, і траєкторія буде спадати до нерухомої точки  $k_1^* < k_0$ . У випадку 3 точка  $k_1^* < k_0$ , тому траєкторія буде спадати до нерухомої точки  $k_1^*$ . В той час у випадку 1 точка  $k_1^* > k_0$ , тобто траєкторія буде зростати. У цьому випадку робота економіки має місце існувати.
- *Постановка задачі:* потрібно побудувати траєкторію  $k_t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots, t_\beta$  для вибраної початкової точки  $k_0, k_1, k_2, \dots, k_\beta$  та оцінити інтервал її зміни на інтервалі  $[0, t_\beta]$ .  $\lim_{t \rightarrow \infty} k_t = k_*$ . Необхідно визначити ступінь приближення до нерухомої точки  $k_*$ .

7

Рисунок А.7

- Часовий ряд:



- Обчислимо приріст змінної  $k_t$  (капітал на душу населення):

$$\Delta(k_{13}) = k_{13} - k_0 = 6.8476196 - 0.6 = 6.2476196$$

- Приріст капіталу за період  $t_\beta = 13$  становить:

$$\Delta(K_{t_\beta=13}) = K_{t_\beta=13} - K_0 = (k_{t_\beta=7}(1+n)^{t_\beta=13} - k_0)L_0 = (6.8476196 * (1.05)^{13} - 0.6) * L_0 \approx 12.31 * L_0$$

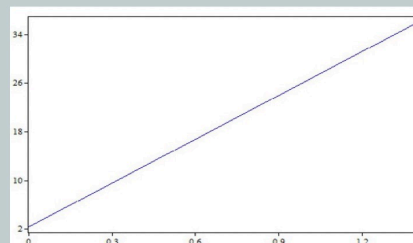
8

Рисунок А.8

- Побудуємо біфуркаційні діаграми для даного рівняння:

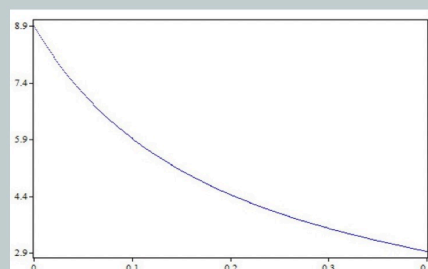
- Біфуркаційна діаграма для параметра  $s$ :

Як показано на графіку, збільшення значення  $s$  впливає на зміщення вправо по осі  $OX$  стійкої точки.



- Біфуркаційна діаграма для параметра  $n$ :

Можемо спостерігати на графіку, збільшення параметра  $n$  веде до зрушень стійкої точки вліво по осі  $OX$ .

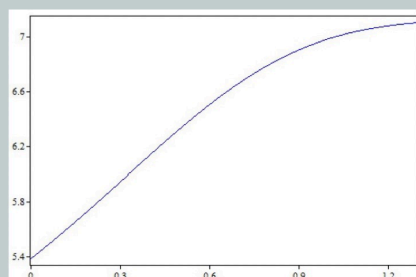


9

Рисунок А.9

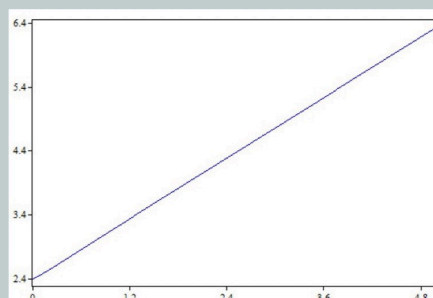
- Біфуркаційна діаграма для параметра  $d$ :

Графік показує, що при збільшенні параметра  $d$ , стійка точка зсувається вправо по осі  $OX$ .



- Біфуркаційна діаграма для параметра  $l$

Збільшення параметра  $l$  призводить до зміщення вправо по осі  $OX$  точки стійкості.



10

Рисунок А.10

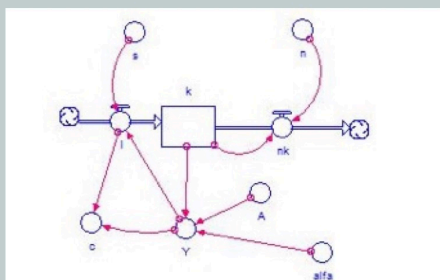
### ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ПАКЕТУ ITHINK

- Імітаційне моделювання - це найпоширеніший різновид аналогового моделювання, реалізованого за допомогою набору математичних інструментальних засобів, спеціальних імітуючих комп'ютерних програм і технологій програмування, що дозволяють провести цілеспрямоване дослідження структури і функцій реального складного процесу в пам'яті комп'ютера і виконати оптимізацію деяких його параметрів.
- Продемонструємо на пакеті Ithink технологію застосування пакетів імітаційного моделювання для дослідження математичних моделей теорії економічного зростання. Як приклад моделі економічного зростання використовуємо модель Солоу.

11

Рисунок А.11

- Структурна схема моделі Солоу, побудована з вбудованих блоків пакета імітаційного моделювання:



- резервуар  $k$  являє собою фондоозброєність;
- потоки  $I$  і  $nk$  відображають значення інвестицій та амортизації в кожен момент часу  $t$ ;
- конвертори  $C$  і  $Y$  представляють споживання та інвестиції, а  $s$ ,  $m$ ,  $A$  і  $\alpha$  – константи.
- блоки з'єднані рожевими стрілками - конекторами, що показують інформаційні зв'язки в моделі.

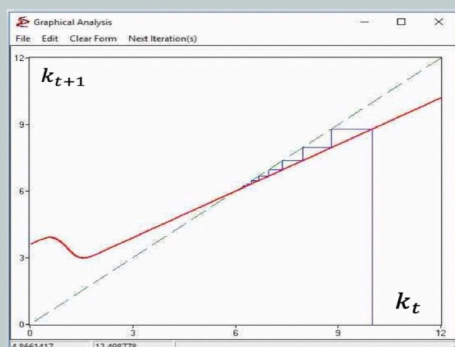
12

Рисунок А.12

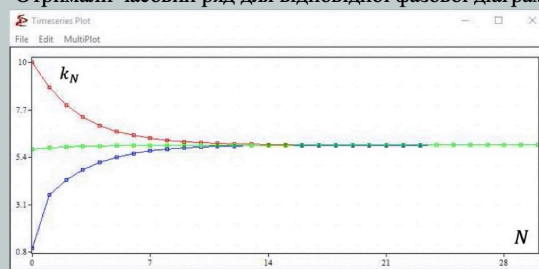




- В залежності від значень параметрів у моделі Солоу отримаємо з випадки поведінки росту економіки.
- Фазова діаграма



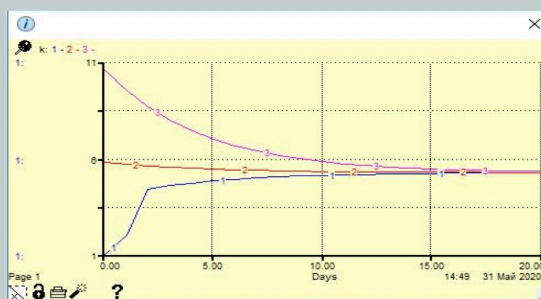
Отримали часовий ряд для відповідної фазової діаграми:



15

Рисунок А.15

- Виберемо декілька початкових значень, щоб побачити, яку поведінку буде мати економіка країни в залежності від початкового капіталу.
- Випадок 1:  $A = 6, B = 0, \text{alfa} = 0.5, p = 0, s = 0.3, u = 0, M = 4$ .
- Залежність  $k_t$  від  $t$ :



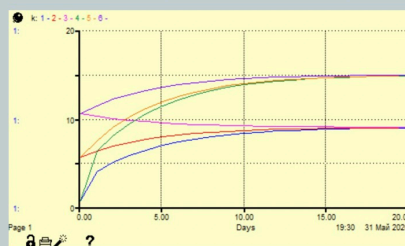
- Отже, після моделювання даної моделі з певними параметрами маємо нерухому стійку точку, це говорить про те, що незалежно від початкових значень економіка країни буде залишатися стабільною, це властиво для високорозвинених держав.

16

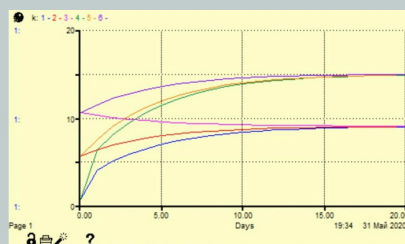
Рисунок А.16

- За допомогою імітаційного моделювання Ithink визначимо, які параметри впливають на ріст економіки.

При зростанні значення параметра  $s$  (з 0.3 до 0.5) значення стійкої точки зміщується вгору по осі  $OY$ , тобто такі зміни параметра  $s$  позитивно впливає на економіку країни.



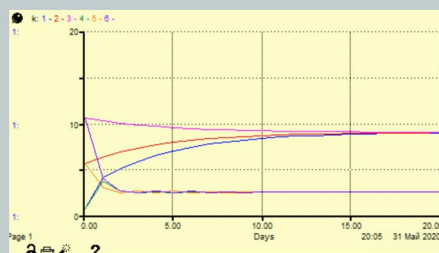
При зростанні параметра  $A$  (з 6 до 10) значення стійкої точки зміщується вгору по осі  $OY$ , тобто економіка країни становиться більш міцною.



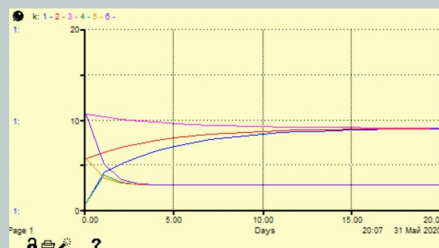
17

Рисунок А.17

При зростанні параметра  $d$  (з 0.2 до 0.8) значення стійкої точки зміщується вниз по осі  $OY$ , тобто такі зміни негативно впливають на економіку країни.



При зростанні параметра  $n$  (з 0 до 0.5) значення стійкої точки зміщується вниз по осі  $OY$ , тобто такі зміни негативно впливають на економіку країни.



18

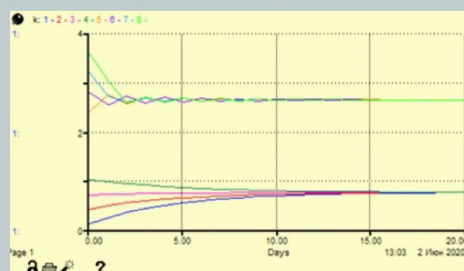
Рисунок А.18

Розглянемо ще два випадки поведінки економіки за допомогою програмного пакету Ithink:

Побудований числовий ряд з параметрами:

$\alpha = 4, M = 4, A = 3, p = 2, d = 0.2, n = 0, s = 0.3, B = 0.5, u = -2.5$

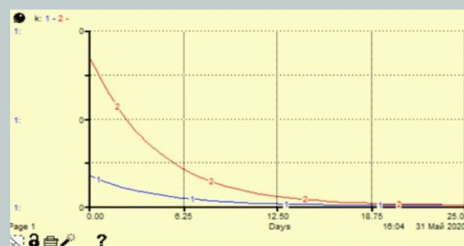
Модель з даними параметрами буде мати дві стійкі точки, що демонструє періодичну економіку, яка властива для країн з середнім рівнем розвитку



Побудований числовий ряд з параметрами:

$\alpha = 1, M = 4, A = 1, p = 2.5, d = 0.2, n = 0, s = 0.3, B = 0, u = -1$

Маємо одну стійку точку, яка дорівнює нулю. Це говорить про те, що рівень економіки постійно падає, це властиво для слаборозвинених країн



19

Рисунок А.19

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!

20

Рисунок А.20